תרגיל 1 - פתרון

(1) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע ולא ריקה. הוכיחו כי

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

<u>הוכחה</u>

A חסומה מלרע ולכן לפי אקסיומת השלמות

קיים $M = \inf(A)$

$$\Downarrow$$

$$M \le a \quad \forall a \in A$$

$$\Downarrow$$

$$-a \le -M \quad \forall a \in A$$

$$\Downarrow$$

נסמן $b = -a$ ונקבל $\forall b \in -A : b \le -M$

$$\Downarrow$$

$-M$ חסם מלעיל של $-A$

מאחר ו- $M = \inf(A)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ M + \varepsilon > a$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ -M - \varepsilon < -a$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in -A : \ -M - \varepsilon < b$$

$$\Downarrow$$

$$\sup(-A) = -M$$

$$\Downarrow$$

$$\inf(A) = M = -(-M) = -\sup(-A)$$

$$\Downarrow$$

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

(2) מצאו והוכיחו $\inf, \sup, \min, \max$ עבור
הקבוצה הבאה: $A=\left\{(-1)^n\left(8-\frac{5}{3^n}\right) \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

<u>הוכחה</u>

נתבונן בתחילת הקבוצה
$$\left\{-6\tfrac{1}{3},\ 7\tfrac{4}{9},\ -7\tfrac{22}{27},\ 7\tfrac{76}{81},\ \ldots\right\}$$

נשים לב שהאיברים מתקרבים ל-8 מלמטה
ול- -8 מלמעלה.

ולכן נוכיח $\sup(A)=8$ $\inf(A)=-8$

ראשית נראה ש-8 חסם עליון
עבור n אי זוגי נקבל איבר מהצורה:
$$-\underbrace{\left(8-\frac{5}{3^n}\right)}_{\text{חיובי}}<0<8$$

ולכן נתמקד ב-n זוגי:
איבר ב-A יהיה מהצורה
$$8-\underbrace{\frac{5}{3^n}}_{>0}<8$$

ולכן קיבלנו $8 \geq A$ וגם 8 חסם מלעיל

כעת לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $n = \lceil \log_3\left(\frac{5}{\varepsilon}\right) \rceil + 1$ ונקבל:

$$8 - \frac{5}{3^n} > 8 - \frac{5}{3^{\log_3(5/\varepsilon)}} = 8 - \frac{5}{5/\varepsilon} = 8 - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sup(A) = 8$$

ומאחר ו- $8 \notin A$ לא קיים $\max(A)$

באותו אופן ניתן להראות $\inf(A) = -8$

Scanned by CamScanner