דפי נוסחאות במד"ח

משוואה קוואזי לינארית:

$$a\left(x,y,u\right)u_x+b\left(x,y,u\right)u_y=c\left(x,y,u\right)$$

שיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a\left(x,y,u\right)}=\frac{dy}{b\left(x,y,u\right)}=\frac{du}{c\left(x,y,u\right)}$$

ע"י פתירה של שתיים מהמשוואות מקבלים:

$$\phi_1\left(x,y,u\right)=c_1,\quad \phi_2\left(x,y,u\right)=c_2$$

פתרון כללי:

$$F\left(\phi_1\left(x,y,u\right),\phi_2\left(x,y,u\right)\right)=0$$

שיטת הקווים האופיינים:

קו התחלתי , $t=0$:

$$\Gamma:=\left\{x_0\left(s\right),y_0\left(s\right),u_0\left(s\right)\right\}$$

מערכת הקווים האופייניים:

$$\begin{cases}x\left(0;s\right)=x_0\left(s\right)\\ y\left(0;s\right)=y_0\left(s\right)\\ u\left(0;s\right)=u_0\left(s\right)\end{cases},\qquad \begin{cases}x'\left(t;s\right)=a\left(x,y,u\right)\\ y'\left(t;s\right)=b\left(x,y,u\right)\\ u'\left(t;s\right)=c\left(x,y,u\right)\end{cases}$$

מיון מד"ח לינארית מסדר שני:

$$a\left(x,y,u\right)u_{xx}+2b\left(x,y,u\right)u_{xy}+c\left(x,y,u\right)u_{yy}+F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0$$

כאשר מקדמי המשוואה לאחר הטרנספורמציה הם:

$$\begin{cases}A\left(\xi,\eta\right)=a\xi_x^2+2b\xi_x\xi_y+c\xi_y^2\\ B\left(\xi,\eta\right)=a\xi_x\eta_x+b\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+c\xi_y\eta_y\\ C\left(\xi,\eta\right)=a\eta_x^2+2b\eta_x\eta_y+c\eta_y^2\end{cases}$$

משוואת הגלים

משוואת הגלים ההומוגנית- מיתר אינסופי:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty, t>0\\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right), & -\infty<x<\infty\\ u_t\left(x,0\right)=g\left(x\right), & -\infty<x<\infty\end{cases}$$

נוסחת דאל'מבר :

$$u\left(x,t\right)=\frac{f\left(x-at\right)+f\left(x+at\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g\left(s\right)ds$$

משוואת הגלים הלא הומוגנית- מיתר אינסופי:

$$\begin{cases}u_{tt}\left(x,t\right)=a^2u_{xx}\left(x,t\right)+G\left(x,t\right), & -\infty<x<\infty,\quad t>0\\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right), & -\infty<x<\infty\\ u_t\left(x,0\right)=g\left(x\right), & -\infty<x<\infty\end{cases}$$

נוסחת דאל'מבר המורחבת :

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\left[\int\limits_{x-a(t-\eta)}^{x-a(t+\eta)}G(\xi,\eta)\,d\xi\right]d\eta$$

משוואת הגלים

משוואת הגלים ההומוגנית - מיתר המוחזק בשני צדדיו:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<L,\quad t>0\\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le L\\ u_t(x,0)=g(x), & 0\le x\le L\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{\pi kat}{L}\right)+b_k\sin\left(\frac{\pi kat}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)$$

מקדמי טור הפורייה:

$$\begin{cases} a_k=\frac{2}{l}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx\\ b_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx\end{cases}$$

משוואת החום:

משוואת החום - מוט המוחזק משני צדדיו :

עבור תנאי דיריכלה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L,\quad t>0\\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le L\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_ke^{-\left(\frac{\pi ka}{L}\right)^2t}\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)$$

מקדמי טור הפורייה:

$$b_k=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx$$

משוואת החום - מוט המוחזק משני צדדיו :

עבור תנאי נוימן:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L,\quad t>0\\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le L\\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

$$u(x,t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_ke^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2t}\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)$$

מקדמי טור הפורייה:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx\\ a_{k=}\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx\end{cases}$$

משוואת לפלס

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

בעיית דיריכלה למשוואת לפלס בעיגול:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < R^2 \\ u(x,y) = f(x,y), & x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

פתרון בעיית דיריכלה למשוואת לפלס בעיגול בעזרת אינטגרל פאסון:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u\left(Re^{i\varphi}\right)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}\right]d\varphi$$

פתרון בעיית דיריכלה למשוואת לפלס בעיגול ע"י הפרדת משתנים:

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right]$$

מקדמי טור הפורייה:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \end{cases}$$

תנאי הכרחי לקיום פתרון בעיית נוימן עבור בעיית דיריכלה לאופרטור לפלס:

$$\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}d\ell = 0$$

כאשר: D הוא התחום של הבעיה, ∂D היא שפת התחום, $\hat{n}$ הוא ווקטור נורמל באורך יחידה שפונה כלפי חוץ שפת התחום.
נגזרת כיוונית:

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \nabla u \cdot \hat{n}$$

משפט גאוס:

$$\iint_D div(F)\, dxdy = \oint_{\partial D} F \cdot \hat{n} d\ell$$

כאשר: D הוא תחום הבעיה, ∂D שפה של התחום, F-פונקציה ווקטורית, ו- $\hat{n}$ הוא ווקטור נורמל באורך יחידה שפונה כלפי חוץ שפת התחום.
משפט גרין:

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdy = \oint_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial \hat{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\right)d\ell$$

קואורדינטות	טרנספורמציה	לפלסיאן	גרדיאנט
קרטזיות	$x = x, \quad y = y$	$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$	$\nabla u = (u_x, u_y)$
פולריות	$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$	$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$	$\nabla u = \left(u_r, \frac{1}{r}u_\theta\right)$

נוסחאות כלליות:

מד"ר לינארית מסדר ראשון:

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

הפתרון כללי :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

מד"ר לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים: $ay'' + by' + cy = 0$, הצבה: $y = e^{rx}$
הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda = -b/2a \\ \mu = \sqrt{-\Delta}/2a \end{cases}, \quad \begin{cases} y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, & \Delta > 0 \\ y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} & \Delta = 0 \\ y(x) = e^{\lambda x} \left[c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x) \right] & \Delta < 0 \end{cases}$$

.

משוואת אוילר: $Ax^2y'' + Bxy' + Cy = 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}$, הצבה: $y = x^r$,
הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{cases} y(x) = c_1 x^{r1} + c_2 x^{r_2} & \Delta > 0 \\ y(x) = x^r (c_1 + c_2 \ln x) & \Delta = 0 \\ y(x) = x^{\lambda} \left[c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x) \right] & , \Delta < 0 \end{cases}$$

פיתוח פונקציה לטור פורייה:
טור פורייה בקטע $[a, b]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right]$$

כאשר מקדמי פורייה בקטע $[a, b]$:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx \\ b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx \end{cases}$$

נוסחאות טריגונומטריות:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(a) + \tan(\beta)}{\tan(a)\tan(\beta)}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$
$$\sin^3(\alpha) = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$
$$\cos^3(\alpha) = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

אינטגרלים:

$$\int x\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$
$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$
$$\int x^2\sin(ax)\,dx = \frac{2\cos(ax)}{a^3} + \frac{2x\sin(ax)}{a^2} - \frac{x^2\cos(ax)}{a}$$
$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\sin(ax)}{a^3} + \frac{x^2\sin(ax)}{a}$$
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)}{a^2 + b^2}$$
$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\left(a\cos(bx) + b\sin(bx)\right)}{a^2 + b^2}$$