חוברת תרגולים ־ גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

אלעד עטייא

21 בדצמבר 2016

תוכן עניינים

1 הקדמה

1.1 מבוא

- החוברת מתאימה לקורס גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית 1 של פרופסור מיכאל כץ, הנלמד בסמסטר ב'.
- בסוף כל פרק מופיעים תרגילים הקשורים לפרק ולאחריהם פתרונות.
- עם זאת, השתדלתי להוסיף חומרים שנלמדים בסמסטר הקיץ (עם פרופסור ראובן כהן) כדי שגם הסטודנטים שלומדים בקיץ יוכלו להשתמש בחוברת. חומרים אלו מופיעים בנספחים.
- בהמשך לכך, בנספחים מופיעים עוד נושאי העשרה שכדאי מאד לעבור עליהם.
- כמו כן, בסוף החוברת מופיעים המתמטיקאים המוזכרים בחוברת, עם תיאור קצרצר על חייהם ופועלם המתמטי.
- יש כמה תרגילים שחוזרים על עצמם; כדאי לפתור אותם בכל פעם בה הם מופיעים.

1.2 הערות והארות לסימונים בחוברת

1. חשוב לשלוט בסימון איינשטיין, מכיוון שלאורך הקורס נתקלים בביטויים עם ארבעה־חמישה אינדקסים ואפילו יותר; לשם כך הוקדש פרק שלם בחוברת להבנת הסימון.
2. עקומות מישוריות יסומנו בדרך כלל ב$-\alpha$, ועקומות מרחביות יסומנו בדרך כלל ב$-\beta$.
3. אם יש צורך להדגיש שעקומה מסוימת נתונה בפרמטריזצית אורך קשת, פרמטר העקומה יסומן ב$-s$.
4. פרמטריזציה של משטח סומנה באות X (לעיתים נדירות ב$-x$).
5. במשטח סיבוב, הקואורדינטות הן (θ,ϕ), והעקומה מסומנת באמצעות r,z:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(r\left(\phi\right),0,z\left(\phi\right)\right)$$

עם זאת, במקרה בו היה צורך להדגיש שהעקומה היא במהירות יחידה סימנתי את פרמטר העקומה ב$-s$ במקום ב$-\phi$.

6. בסימון של איבר a^i_j מתוך מטריצה (כאשר מסתכלים עליה כעל העתקה ליניארית), האינדקס התחתון לא נמצא מתחת לאינדקס העליון, אלא מעט מימינו ($stagger$, "מתנודד").
7. **סימונים ישנים.** חלק מהסימונים בסמסטר הקיץ שונים מאלו שבקורס שבסמסטר ב'. הסימונים בחוברת הם כפי שמסמן פרופסור כץ בחוברת הקורס.

2 סכימת איינשטיין

סכימת איינשטיין היא דרך סימון מקוצרת לסכומים.

בקצרה, נרצה להשמיט את ה$-\Sigma$ מהסכום, ולכתוב אותו ללא סימן ה$-\Sigma$.

לפני שנסביר איך עושים זאת, נחליט על מספר סימונים:

1. קואורדינטות של וקטורים נסמן עם אינדקס עליון, למשל עבור $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$$

2. כאשר נרצה לסמן איברים שונים בקבוצה, נשאיר את האינדקס למטה, כמו בסימון המוכר לנו. למשל, הקבוצה:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

היא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

3. מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מסומנת ב$-\left(a_{ij}\right)$ או ב$-\left(a^i_j\right)$ בהתאם להקשר:

(א) איבר בודד מסומן ב$-a^i_j$ (אות קטנה) אם אנו מסתכלים על המטריצה כעל מייצגת העתקה ליניארית, כלומר:

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

הפועלת באופן הבא: $v \mapsto Av$.

(ב) איבר בודד מסומן ב$-a_{ij}$ (אות קטנה) אם אנו מסתכלים על המטריצה כעל מייצגת תבנית בילינארית, כלומר:

$$A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

הפועלת באופן הבא: $A\left(u, v\right) = u^t Bv$.

4. עבור $\left(b_{ij}\right)$, נסמן:

$$b_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} - b_{ji}\right)$$

$$b_{\{ij\}} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} + b_{ji}\right)$$

הסימון יועיל, במיוחד בהוכחת המשפט הראוי־לציון.

5. עבור $B = (b_{ij})$ הפיכה, נסמן את המטריצה ההופכית באופן הבא:

$$B^{-1} = \left(b^{ij}\right)$$

אם כן, סכימת איינשטיין אומרת שאם אינדקס מופיע גם למעלה וגם למטה, יש לסכום על כל הערכים של אינדקס זה.

לדוגמה:

1. אם $\{e_1, e_2, e_3\}$ היא הבסיס הסטדנרטי של $\mathbb{R}^3$, כל וקטור $v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$ אפשר להציג כך:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + v^3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i e_i$$

ולפי סכימת איינשטיין נרשום:

$$v = v^i e_i$$

2. נתבונן במערכת משוואות ליניאריות:

$$Ax = b$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ו-$x \in \mathbb{R}^n$. נרצה להביע זאת באמצעות סכימת איינשטיין. נכתוב זאת במפורש:

$$\begin{pmatrix} a^1_{\ 1} & a^1_{\ 2} & \cdots & a^1_{\ n} \\ a^2_{\ 1} & a^2_{\ 2} & \cdots & a^2_{\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^i_{\ 1} & a^i_{\ 2} & \cdots & a^i_{\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_{\ 1} & a^m_{\ 2} & \cdots & a^m_{\ n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^i \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^i \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

כעת, לכל i,

$$b^i = a^i_{\ 1} u^1 + a^i_{\ 2} u^2 + \cdots + a^i_{\ n} u^n = \sum_{j=1}^{n} a^i_{\ j} u^j$$

ולפי סכימת איינשטיין:

$$b^i = a^i_{\ j} u^j$$

הערה 2.1 כמה דברים שיש לשים אליהם לב:

1. סכימת איינשטיין נקראת גם **סימון איינשטיין** או **הסכם הסכימה של איינשטיין**.
2. חשוב לשים לב להקשר בו מוצג הסימון. למשל, איך נדע אם v^2 משמעו הקואורדינטה השנייה בוקטור v או v בריבוע? מההקשר בו מוצג הסימון.
3. באופן דומה, כשנציג סכום בסימון איינשטיין, למשל: $v^i = a^i_{\ j} u^j$, אנו לא יודעים היכן האינדקס j רץ; עלינו להבין זאת מההקשר.

תזכורת:

המכפלה הסלקרית ב־$\mathbb{R}^3$ מוגדרת על ידי:

$$\langle u, v\rangle = u \cdot v = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i$$

כאשר $u = \left(u^1, u^2, u^3\right), v = \left(v^1, v^2, v^3\right)$.

נחזור אליה בפרק הבא.

אי־אפשר לכתוב את הסכום הזה כ־$u^i v^i$ לפי סכימת איינשטיין, מכיוון שהאינדקס נמצא רק למעלה (ולא למעלה ולמטה כנדרש).

איך בכל זאת נציג את המכפלה הסקלרית בעזרת סכימת איינשטיין?

הגדרה 2.2 **הדלתא של קרונקר** מוגדרת על ידי:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

כאשר $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

הערה 2.3 סימנו את הדלתא של קרונקר במקרה זה עם שני אינדקסים תחתונים, מכיוון שאנו עוסקים במכפלה סקלרית ־ ומכפלה סקלרית היא תבנית בילינארית.

נחזור לבעיה שלנו. אם נשתמש בדלתא של קרונקר:

$$\delta_{ij} u^i v^j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} u^i v^j =$$

לפי סכימת איינשטיין; במקרה שלנו, $n=3$.
מהגדרת הדלתא של קרונקר נישאר עם:

$$=u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3=u\cdot v$$

כלומר:

$$u\cdot v=\delta_{ij}u^iv^j$$

והבענו את המכפלה הסקלרית באמצעות סכימת איינשטיין.

הגדרה 2.4 אינדקס שסכום רץ עליו (נמצא גם למעלה וגם למטה בסימון שלנו) נקרא **אינדקס סכימה**.
אינדקס שלא רץ עליו סכום (נמצא רק למטה או רק למעלה בסימון שלנו) נקרא **אינדקס חופשי**.

<u>תרגיל:</u>
הוכיחו שפעולת כפל מטריצות היא קיבוצית, אסוציאטיבית.
כלומר, הראו שעבור מטריצות A,B,C מתקיים:

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

<u>פתרון:</u>
נניח כמובן שאפשר לכפול את המטריצות זו בזו.
ראשית, ננסה להבין איך נראה איבר במכפלת מטריצות.
נסמן $AB=D$, ואז:

$$d^i_j=R_i\left(A\right)\cdot C_j\left(B\right)=\sum_k a^i_kb^k_j=a^i_kb^k_j$$

לפי סכימת איינשטיין.
כעת, נסמן גם: $BC=E$, ונסמן: $A\left(BC\right)=F,\left(AB\right)C=G$.
אם כן:

$$f^i_j=a^i_ke^k_j=a^i_k\left(b^k_lc^l_j\right)=$$

פעולת הכפל על סקלרים בוודאי אסוציאטיבית, ולכן:

$$= \left(a^i_{\ k} b^k_{\ l}\right) c^l_{\ j} = e^i_{\ l} c^l_{\ j} = g^i_{\ j}$$

כלומר לכל i, j איברי המטריצות $A \cdot (B \cdot C), (A \cdot B) \cdot C$ שווים ולכן הן שוות.
לכן פעולת כפל מטריצות היא אכן אסוציאטיבית.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הביטוי $\delta^i_{\ j} \delta^j_{\ i}$ כאשר $1 \leq i, j \leq n$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב שלכל מטריצה $\left(a^i_{\ j}\right)$ מתקיים:

$$\delta^i_{\ j} a^j_{\ k} = a^i_{\ k}$$

ולכן נקבל:

$$\delta^i_{\ j} \delta^j_{\ i} = \delta^i_{\ i}$$

$1 \leq i \leq n$ ומהגדרת הדלתא של קרונקר, נקבל שהביטוי שווה ל־n.

<u>תרגיל:</u>

פשטו את הביטוי $\delta^a_{\ b} g_{ca} g^{bd} \delta^c_{\ d}$, כאשר $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

<u>פתרון:</u>

מתקיים: $\delta^a_{\ b} g_{ca} = g_{cb}$, וגם: $g^{bd} \delta^c_{\ d} = g^{bc}$, ולכן:

$$\delta^a_{\ b} g_{ca} g^{bd} \delta^c_{\ d} = g^{bc} g_{cb} = \delta^b_{\ b} = n$$

<u>תרגיל:</u>

פשטו את הביטוי $\delta^i_{\ j} g_{ik} \delta^k_{\ l}$.

<u>פתרון:</u>

מתקיים:

$$\delta^i_{\ j} g_{ik} \delta^k_{\ l} = g_{jk} \delta^k_{\ l} = g_{jl}$$

תרגילים נוספים

1. כתבו בצורה מלאה את הסכומים הבאים הנתונים בסימון הסכימה של איינשטיין:

   (א) $a^i_j b^j_k c^k_l$.

   (ב) $a_{ij} v^i v^j$.

   (ג) $\delta_{ij} a^{ij}$.

   כאשר $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$.

2. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין שמתקיים:

$$tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$$

3. בעזרת סימון הסכימה של איינשטיין, הוכיחו שכפל מטריצות מקיים את תכונת הפילוג, דיסטריביוטיביות.
   כלומר, הראו שלכל $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים:

$$A\left(B + C\right) = AB + AC, \left(A + B\right) C = AC + BC$$

4. תהי δ^i_j פונקציית דלתא של קרונקר, כאשר $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. חשבו את הביטוי $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i$, הנתון בסימון הסכימה של איינשטיין.

פתרונות

1. נרשום לפי סכימת איינשטיין:

(א) $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a^i_{\ j} b^j_{\ k} c^k_{\ l} = a^i_{\ j} b^j_{\ k} c^k_{\ l}$, כלומר:

$$= a^i_{\ 1} b^1_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 1} b^1_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 1} b^1_{\ 3} c^3_{\ l} +$$

$$+ a^i_{\ 2} b^2_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 2} b^2_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 2} b^2_{\ 3} c^3_{\ l} +$$

$$+ a^i_{\ 3} b^3_{\ 1} c^1_{\ l} + a^i_{\ 3} b^3_{\ 2} c^2_{\ l} + a^i_{\ 3} b^3_{\ 3} c^3_{\ l}$$

מכיוון שהאינדקסים שנמצאים גם למעלה וגם למטה הם i, j.

(ב) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} v^i v^j = a_{ij} v^i v^j$, כלומר:

$$= a_{11} v^1 v^1 + a_{12} v^1 v^2 + a_{13} v^1 v^3 +$$

$$+ a_{21} v^2 v^1 + a_{22} v^2 v^2 + a_{23} v^2 v^3 +$$

$$+ a_{31} v^3 v^1 + a_{32} v^3 v^2 + a_{33} v^3 v^3$$

(ג) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a^{ij} = \delta_{ij} a^{ij}$, ומהגדרת הדלתא של קרונקר:

$$= a^{11} + a^{22} + a^{33}$$

2. העקבה היא סכום איברי האלכסון, כידוע.
נסמן: $AB = C, BA = D$
לכן:

$$tr\left(AB\right) = d^i_{\ i} = a^i_{\ j} b^j_{\ i} = b^j_{\ i} a^i_{\ j} = c^j_{\ j} = tr\left(BA\right)$$

3. נראה אחד מהצדדים; הצד השני דומה.
נסמן: $B + C = D, AB = E, BC = F, A\left(B + C\right) = G, AB + BC = H$.

$$g^i_{\ j} = a^i_{\ k} d^k_{\ j} = a^i_{\ k}\left(b^k_{\ j} + c^k_{\ j}\right) = a^i_{\ k} b^k_{\ j} + a^i_{\ k} c^k_{\ j} =$$

$$= e^i_{\ j} + f^i_j = g^i_j$$

מכיוון שהמטריצות שוות איבר־איבר, הן שוות.

4. מתקיים:

$$\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i = \delta^i_j \delta^j_i = \delta^i_i = n$$

אפשר לפתור גם באופן הבא:
$\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i$.
מחובר כללי בסכום לא מתאפס כאשר $i = j = k$, ואז המחובר שווה ל־1.
זה מתרחש בדיוק n פעמים (כאשר $i = j = k = l$ לכל $1 \leq l \leq n$), ולכן הסכום הוא n.

3 מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית

3.1 מכפלה סקלרית

לכל שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^n$, נגדיר:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

כאשר u^i היא הקואורדינטה ה$-i$ של הוקטור u.
זו **המכפלה הסקלרית** בין הוקטורים u, v.
אפשר להביע את המכפלה הסקלרית גם באופן גיאומטרי:

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

כאשר $\|u\|$ מסמל את האורך של u ו$-\theta$ היא הזווית החדה בין שני הוקטורים.
את הנורמה $\|u\|$ מחשבים על ידי:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

המכפלה הסקלרית מקיימת את התכונות הבאות:

1. $u \perp v$ כלומר u, v מאונכים אם ורק אם $\langle u, v\rangle = 0$.
2. סימטריות: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
3. אי שליליות: $\langle u, u\rangle \geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $\langle u, u\rangle = 0$.
4. פילוג: $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$.

3.2 מכפלה וקטורית

המכפלה הוקטורית מוגדרת רק לוקטורים מ$-\mathbb{R}^3$, ותוצאתה היא וקטור (ולא סקלר).

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = \left(u^2v^3 - v^2u^3, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - v^1u^2\right)$$

גיאומטרית, המכפלה הוקטורית מחשבת את שטח המקבילית שנוצרת ע"י הוקטורים.

הערה 3.1 אפשר להכליל את המכפלה הוקטורית למימדים גבוהים בעזרת מכפלה טנזורית.

כלומר, $\|a \times b\|$ מבטא את נפח המקבילית הנוצרת ע"י a, b.

<u>תרגיל:</u>

הסבירו את נכונות הזהות: $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$.

<u>פתרון:</u>

במקבילית הנוצרת ע"י a, b נצייר את האלכסון בין הקצוות של a, b (כלומר, את הוקטור $a - b$).

האלכסון חוצה את המקבילית לשני משולשים שווים בשטחם.

מהו שטחו של משולש כזה? חצי צלע$\times$צלע$\times$סינוס הזווית ביניהן, כלומר:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$$

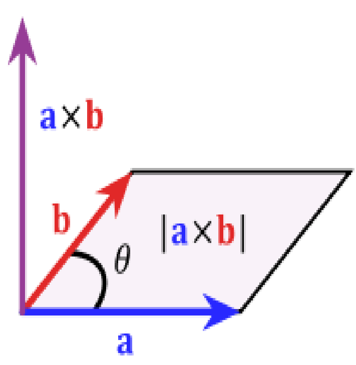
לכן שטחה של המקבילית, ששווה לשטחם של שני משולשים, הוא:

$$\|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta$$

כנדרש.

כמו כן, הוקטור $a \times b$ מאונך לוקטורים a, b (ולכן מאונך למישור הנפרש על ידיהם), ובאוריינטציה חיובית, כלומר:

$$\det(a, b, a \times b) > 0$$



המכפלה הוקטורית מקיימת את התכונות הבאות:

1. אנטי סימטריות: $a \times b = -b \times a$.
2. פילוג: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

3. זהות יעקובי: $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

לכל $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו את **זהות לגראנז'**:

$$\|u \times v\| = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בזהויות הגיאומטריות:

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \sin^2\theta = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \left(1 - \cos^2\theta\right) =$$

$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cos^2\theta = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

זהות לגראנז' נותנת לנו קשר בין שתי המכפלות.

תרגילים נוספים

1. יהיו $a=(2,3,1)\,,b=\left(0,4,\frac{1}{2}\right)\,,c=(6,1,-4)$.
   (א) חשבו את הזווית בין a לבין b.
   (ב) חשבו את שטח המקבילית הנוצרת על ידי b,c.
2. יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אורתונורמליים. הראו ש: $\{a,b,a\times b\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.
3. יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$. הוכיחו את הזהויות הבאות:
   (א) $a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle\,b-\langle a,b\rangle\,c$.
   (ב) $\langle a\times b,c\times d\rangle=\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle-\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$.

פתרונות

1. נשתמש בתכונות המכפלה הסקלרית והמכפלה הוקטורית.

(א) מתקיים:

$$\cos\theta = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$$

במקרה שלנו, $\langle a,b\rangle = \frac{25}{2}, \|a\| = \sqrt{14}, \|b\| = \sqrt{\frac{65}{4}}$, ולכן:

$$\cos\theta = \frac{\frac{25}{2}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{\frac{65}{4}}} = \frac{25}{\sqrt{910}} \approx 0.8287$$

ולכן: $\theta \approx 0.5939$, כלומר $\theta \approx 34.03^o$.

(ב) נחשב את $b\times c$:

$$b\times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = i\cdot\left(-\frac{33}{2}\right) - j\cdot(-3) + k\cdot(-24) = \left(-\frac{33}{2}, 3, -24\right)$$

שטח המקבילית הוא:

$$\|b\times c\| = \sqrt{\left(\frac{33}{2}\right)^2 + 3^2 + 24^2} \approx 29.2788$$

2. מתכונות המכפלה הוקטורית, אנו יודעים שהוקטורים מאונכים; אפשר לבדוק שאכן מתקיים:

$$\langle a, a\times b\rangle = \langle b, a\times b\rangle = 0$$

נותר להראות שמתקיים:

$$\|a\times b\| = 1$$

נשתמש בזהות הגיאומטרית:

$$\|a\times b\| = \|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\theta$$

מכיוון שהוקטורים a,b אורתונורמליים, $\|a\|, \|b\| = 1$ והזווית ביניהם היא: $\theta = \frac{\pi}{2}$,
ולכן גם: $\sin\theta = 1$.
נקבל בסה"כ שאכן $\|a\times b\| = 1$.

3. נסמן: $a=\left(a^1,a^2,a^3\right)$, ובאופן דומה עבור b,c,d.

(א) מתקיים: $b\times c=\left(b^2c^3-b^3c^2,b^3c^1-b^1c^3,b^1c^2-b^2c^1\right)$.
לכן, הוקטור $a\times(b\times c)$ נראה כך (כל קואורדינטה בשורה נפרדת):

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^1&=a^2\left(b^1c^2-b^2c^1\right)-a^3\left(b^3c^1-b^1c^3\right)\\(a\times(b\times c))^2&=a^3\left(b^2c^3-b^3c^2\right)-a^1\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\\(a\times(b\times c))^3&=a^1\left(b^3c^1-b^1c^3\right)-a^2\left(b^2c^3-b^3c^2\right)\end{aligned}$$

נפתח סוגריים ונוציא גורם משותף:

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^1&=b^1\left(a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^2b^2+a^3b^3\right)\\(a\times(b\times c))^2&=b^2\left(a^3c^3+a^1c^1\right)-c^2\left(a^1b^1+a^3b^3\right)\\(a\times(b\times c))^3&=b^3\left(a^1c^1+a^2c^2\right)+c^3\left(a^2b^2+a^1b^1\right)\end{aligned}$$

נתבונן, למשל, בקואורדינטה הראשונה:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\left(a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^2b^2+a^3b^3\right)+b^1a^1c^1-c^1a^1b^1$$

הוספנו וחיסרנו את אותו האיבר. כלומר:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)-c^1\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)$$

ואם כן, קיבלנו:

$$(a\times(b\times c))^1=b^1\langle a,c\rangle-c^1\langle a,b\rangle$$

באופן דומה, נקבל בשתי הקואורדינטות האחרות:

$$\begin{aligned}(a\times(b\times c))^2&=b^2\langle a,c\rangle-c^2\langle a,b\rangle\\(a\times(b\times c))^3&=b^3\langle a,c\rangle-c^3\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$a\times(b\times c)=\left(b^1\langle a,c\rangle-c^1\langle a,b\rangle,b^2\langle a,c\rangle-c^2\langle a,b\rangle,b^3\langle a,c\rangle-c^3\langle a,b\rangle\right)$$

ובסה"כ:

$$a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle b-\langle a,b\rangle c$$

(ב) זהות זו נקראת **זהות בינה־קושי.** נפתח את $\langle a\times b,c\times d\rangle$:

$$\left\langle\left(a^2b^3-a^3b^2,a^3b^1-a^1b^3,a^1b^2-a^2b^1\right),\left(c^2d^3-c^3d^2,c^3d^1-c^1d^3,c^1d^2-c^2d^1\right)\right\rangle$$

נקבל:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} a^i c^i b^j d^j - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} a^i d^i c^j b^j$$

נוסיף ונחסר את האיברים $a^i b^i c^i d^i$ ונקבל:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a^i c^i b^j d^j - \sum_{i,j=1}^{3} a^i d^i c^j b^j$$

נפצל את הסכומים:

$$\sum_{i=1}^{3} a^i c^i \sum_{j=1}^{3} b^j d^j - \sum_{i=1}^{3} a^i d^i \sum_{j=1}^{3} b^j c^j$$

וזה אכן שווה לביטוי:

$$\langle a, c\rangle \cdot \langle b, d\rangle = \langle a, d\rangle \langle b, c\rangle$$

חשבו איך ניתן להביע זאת באמצעות סימון איינשטיין.

4 תבניות ריבועיות וחתכי חרוט

4.1 תבניות ריבועיות במישור

הגדרה 4.1 תבנית ריבועית במישור היא עקומה המוגדרת על ידי פולינום ממעלה שנייה במשתנים x, y:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

כאשר $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

תבנית ריבועית במישור יכולה לתאר אחת מהצורות הבאות:

1. אליפסה:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. נקודה:

$$x^2 + y^2 = 0$$

3. קבוצה ריקה:

$$x^2 + y^2 = -1$$

4. היפרבולה:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5. הקווים $y = \pm x$, מהמשוואה:

$$x^2 - y^2 = 0$$

.

6. פרבולה:

$$x = ay^2 + c$$

7. קו ישר:

$$x = a$$

צורות האלו נקראות **צורות קנוניות.**

מטרתנו היא להבין מהי הצורה הגיאומטרית אותה מתארת תבנית ריבועית, ומהי הצורה הקנונית שלה.

אם כך, איך מסווגים תבניות ריבועיות?

בשלב הראשון, נתבונן ב: $ax^2 + 2bxy + cy^2$. אפשר לכתוב:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נסמן: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. A מטריצה סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונאלי מעל $\mathbb{R}$.

כלומר, $A = PDP^{-1}$, כאשר:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

כאשר u_i הוא הוקטור העצמי המתאים לערך העצמי λ_i:

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

יתרה מזאת, הוקטורים u_1, u_2 הם אורתונורמליים, ולכן המטריצה P היא מטריצה אורתוגונאלית.

בפרט:

$$P^{-1} = P^t$$

ואז $A = PDP^t$, כלומר $P^tAP = D$. המשוואה שלנו היא:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ונוכל לכתוב:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

אם נסמן: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

מכיוון ש:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t = \left(P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t P^t = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} P^t$$

אם כן:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

ומכאן אפשר להגיע לצורה:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + gx' + hy' + f = 0$$

הצורה הזו נקראת **הצורה האלכסונית** של התבנית הריבועית.
בשלב השני, אנו נפטרים מהגורמים הליניאריים gx', hy'.
נעשה זאת באמצעות השלמה לריבוע:

$$\lambda_1 (x' + \alpha)^2 = \lambda_1 (x')^2 + 2\alpha\lambda_1 x' + \lambda_1 \alpha^2$$

כדי לאפס את g נבחר α המקיים: $2\alpha\lambda_1 = g$, כלומר:

$$\alpha = \frac{g}{2\lambda_1}$$

באופן דומה:

$$\lambda_2\left(y'+\beta\right)^2=\lambda_2\left(y'\right)^2+2\beta\lambda_2 y'+\lambda_2\beta^2$$

ונבחר $\beta=\frac{h}{2\lambda_2}$. נקבל:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{g}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{h}{2\lambda_2}\right)^2+f-\frac{g^2}{4\lambda_1}-\frac{h^2}{4\lambda_2}=0$$

ואפשר לכתוב:

$$\lambda_1\left(x'-\alpha\right)^2+\lambda_2\left(y'-\beta\right)^2-k=0$$

נסמן $x''=x'-\alpha, y''=y'-\beta$ ונקבל:

$$\lambda_1\left(x''\right)^2+\lambda_2\left(y''\right)^2=k$$

וקיבלנו צורה קנונית, כשהיא מוזזת ומסובבת.

משפט 4.2 תהי $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ תבנית ריבועית שהצורה הקנונית שלה היא $\lambda_1\left(x''\right)^2+\lambda_2\left(y''\right)^2=k$, כאשר λ_1,λ_2 הם הערכים העצמיים של המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

בעזרת הערכים העצמיים אפשר להכריע מהי הצורה הגיאומטרית:

1. אם $\lambda_1\lambda_2>0$:
   (א) אם הסימן של k שווה לסימן של λ_1 נקבל אליפסה.
   (ב) אם $k=0$ נקבל נקודה.
   (ג) אם הסימן של k שונה מהסימן של λ_1 נקבל קבוצה ריקה.
2. אם $\lambda_1\lambda_2<0$:
   (א) אם $k\neq 0$ נקבל היפרבולה.
   (ב) אם $k=0$ נקבל פרבולה.
3. אם $\lambda_1\lambda_2=0$ אך $\lambda_1\neq 0\vee\lambda_2\neq 0$, וגם אם $\lambda_1\neq 0$ אז $g\neq 0$ ואם $\lambda_2\neq 0$ אז $h\neq 0$ נקבל פרבולה.

4. אם $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ נקבל קו ישר.

הערה 4.3 אנו יודעים ש: $\det A = \lambda_1\lambda_2, trA = \lambda_1 + \lambda_2$, ולכן אפשר לנסח תנאי זה גם באמצעות הדטרמיננטה והעקבה של המטריצה A.

א. כאשר אחד מהערכים העצמיים מתאפס, אי אפשר לאפס את אחד מהגורמים הליניאריים (ומקבלים פרבולה).

ב. הצורה הקנונית איננה יחידה.

ג. למה אנו רוצים מטריצה אורתוגונאלית דווקא? מטריצה אורתוגונאלית היא **שומרת נורמה**, כלומר:

$$\|Pv\| = \|v\|$$

שימוש במטריצה מלכסנת כללית יכול לכווץ או להרחיב את העקומה, בעוד שאנו רוצים רק לסובב ולהזיז אותה, מבלי לעוות; מטריצה אורתוגונאלית שומרת נורמה ולכן שומרת על צורתה של העקומה (בעצם, מדובר באיזומטריה. ניגע באיזומטריות בהמשך).

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בעקומה:

$$x = \frac{1}{y}$$

ננסה להבין מהי הצורה הגיאומטרית אותה מתארת העקומה, ומהי הצורה הקנונית שלה.
אם כן, את העקומה שלנו אפשר להציג כך:

$$xy - 1 = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = 0$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.
נמצא את הערכים העצמיים:

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן $u^1 = -u^2$. אנו רוצים וקטור אורתונורמלי ולכן נבחר: $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לכן:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ואם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P$, נקבל:

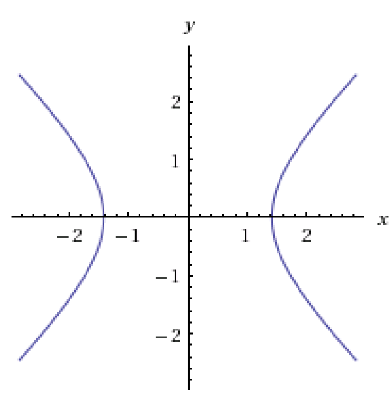
$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0$$

כלומר:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

וזו היפרבולה.

העקומה נראית כך:



<u>תרגיל:</u>

סווגו את העקומות הריבועיות הבאות והביאו אותן לצורה קנונית.

1. $x^2-2xy+3y^2-4x+5y-6=0$.

<u>פתרון:</u>

מתקיים:

$$x^2-2xy+3y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.

נמצא את הערכים העצמיים:

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+2$$

נקבל שהערכים העצמיים הם $\lambda=2\pm\sqrt{2}$.

נמצא את הוקטורים העצמיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}=\left(2+\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

פותרים את המשוואות ומקבלים: $u^1=\left(1+\sqrt{2}\right)u^2$, כלומר: $u=\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל ונקבל: $u=\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}=\left(2-\sqrt{2}\right)\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

פותרים את המשוואות ומקבלים: $u^1=\left(1-\sqrt{2}\right)u^2$, כלומר: $u=\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

ננרמל ונקבל: $u=\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

המטריצה המלכסנת היא:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P$, נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{8}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{8}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 6$$

כלומר:

$$\left(2+\sqrt{2}\right)(x')^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)(y')^2 + \frac{1-4\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8}}}x' + \frac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{8}}}y' = 6$$

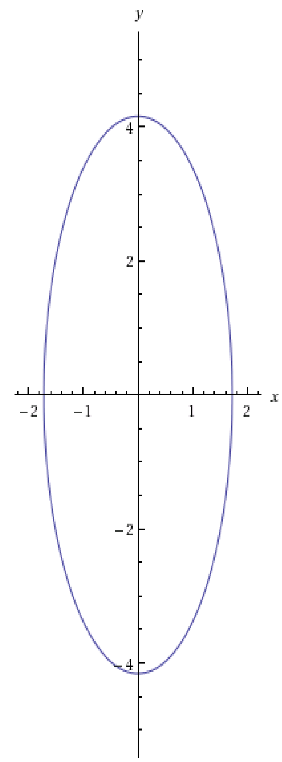
אחרי השלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

כאשר: $b^2 = \frac{81}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}, a^2 = \frac{81}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

זוהי אליפסה.

העקומה נראית כך:



ב. $x^2-2xy+y^2+y=0$.

<u>פתרון:</u>

מתקיים:

$$x^2-2xy+y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ אורתוגונאלית.

נמצא את הערכים העצמיים:

$$0=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda$$

ולכן $\lambda=0,2$.

נמצא את הוקטורים העצמיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל $u^1 = u^2$, ולכן נבחר $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

באופן דומה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

נקבל $u^1 = -u^2$, ולכן נבחר $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לפיכך, המטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ואם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$2\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0$$

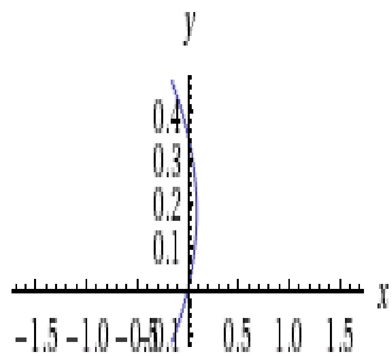
כלומר:

$$\left(y'\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{8}}x' - \frac{1}{\sqrt{8}}y' = 0$$

נשלים לריבוע ונקבל:

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{32}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{8}}x' = \frac{1}{\sqrt{32}}$$

אפשר לסדר עוד קצת; זו פרבולה.
העקומה נראית כך:

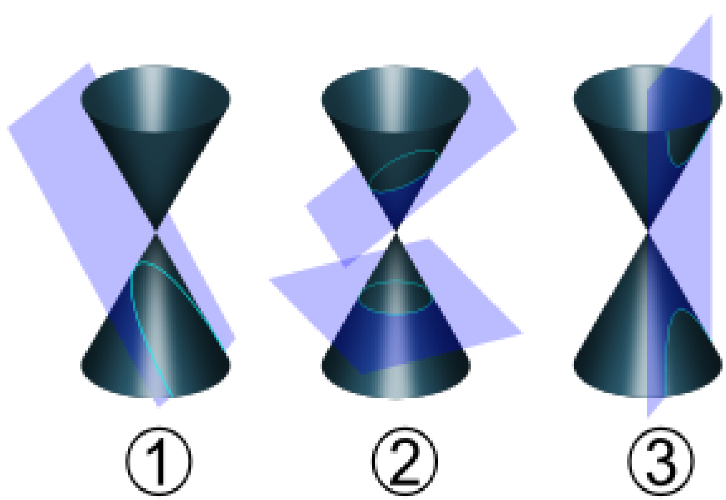


4.2 חתכי חרוט

תבניות ריבועיות דו־מימדיות נקראות גם חתכי חרוט, מכיוון שכל העקומות האלו – אליפסה, היפרבולה ופרבולה – ניתנות להצגה כחיתוך של חרוט מהצורה:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

עם מישור.



בתמונה ניתן לראות שצורת העקומה תלויה בזווית בה המישור חותך את החרוט.

1. אם חותכים ב־$\frac{\pi}{4}$ מקבלים פרבולה.
2. אם חותכים בזווית הקטנה מ־$\frac{\pi}{4}$ מקבלים אליפסה.

3. אם חותכים בזווית הגדולה מ$-\frac{\pi}{4}$ מקבלים היפרבולה.

4.3 מטריצות סיבוב

4.3.1 מטריצות סיבוב במישור

כדי לסובב וקטור $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ בזווית של θ נגד כיוון השעון, עלינו לכפול אותו במטריצת הסיבוב:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

שימו לב שעמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ (לכל θ), ולכן R_θ מטריצה אורתוגונאלית, ובפרט שומרת נורמה.

לדוגמה:

נסובב את הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ב$-\frac{\pi}{2}$. לכן, עלינו לכפול אותו במטריצה:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הערה 4.4 במישור אפשר לסובב וקטור בשני כיוונים - עם כיוון או השעון או נגדו. אפשר להתייחס אל סיבוב בזווית של θ עם כיוון השעון כאל סיבוב בזווית של $-\theta$ נגד כיוון השעון, ולכן יש בעצם רק כיוון סיבוב אחד במישור - נגד כיוון השעון.

4.3.2 מטריצות סיבוב במרחב

בניגוד למישור, שם יש לנו רק כיוון אחד בו אפשר לסובב וקטור, במרחב אפשר לסובב וקטור סביב כל אחד מהצירים.

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה$-x$, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה$-y$, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

כדי לסובב וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ בזווית של θ סביב ציר ה$-x$, נכפול אותו במטריצה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הערה 4.5 שימו לב שבכל אחד מהמקרים עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ (לכל θ), ולכן R_θ מטריצה אורתוגונאלית, ובפרט שומרת נורמה.

<u>תרגיל:</u>

סובבו את הוקטורים הבאים סביב אחד מהצירים בזווית של $\frac{\pi}{2}$ ושל $\frac{\pi}{4}$.

1. $(-1,1,3)$.
2. $(2,0,2)$.
3. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

<u>פתרון:</u>

נסובב למשל סביב ציר ה$-z$. מטריצות הסיבוב המתאימות הן:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$$

3. נקבל:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},R_{\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4.4 משטחים ריבועיים

הגדרה 4.6 משטח ריבועי או תבנית ריבועית במרחב הוא משטח המוגדר על ידי פולינום ממעלה שנייה במשתנים x, y, z:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+jz+k=0$$

כאשר $a,b,c,d,e,f,g,h,j,k\in\mathbb{R}$.

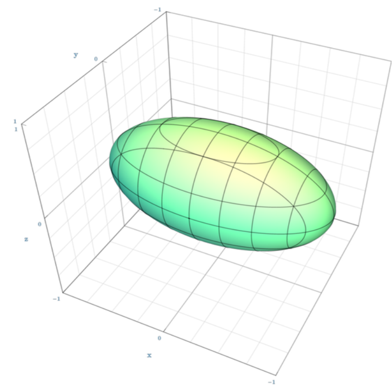
בדומה לתבניות ריבועיות במישור, גם כאן נרצה בשלב הראשון להביא את התבנית לצורה אלכסונית על ידי לכסון אורתוגונאלי של המטריצה המתאימה:

$$A=\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix}$$

ובשלב השני להביא את התבנית לצורה אלכסונית.
למשטח ריבועי יכולה להיות אחת מהצורות הקנוניות הבאות:

1. אליפסואיד:

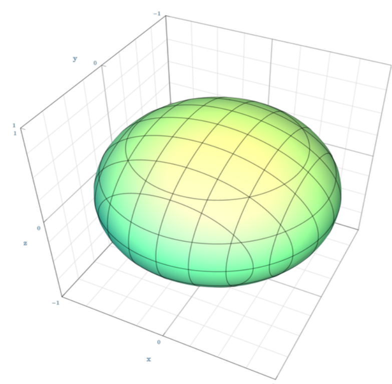
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



לאליפסואיד שני מקרים פרטיים מעניינים:

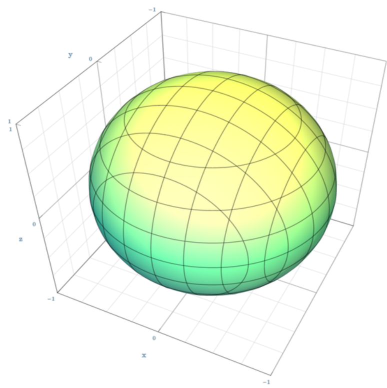
(א) ספרואיד:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



(ב) ספירה:

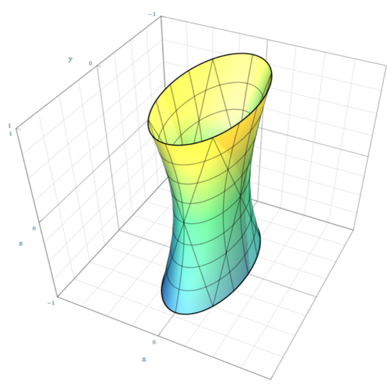
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$



2. היפרבולואיד:

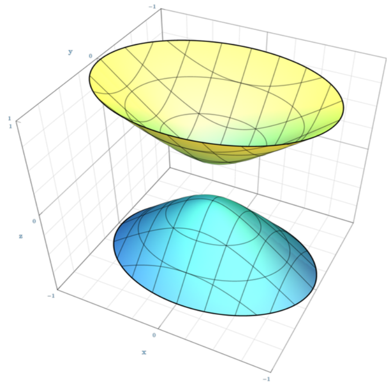
(א) חד־יריעתי:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



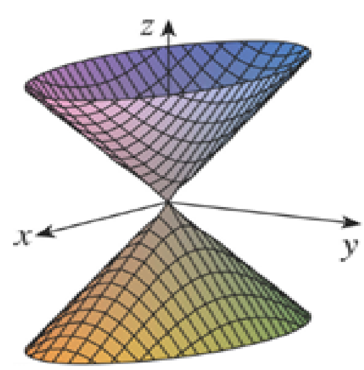
(ב) דו־יריעתי:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



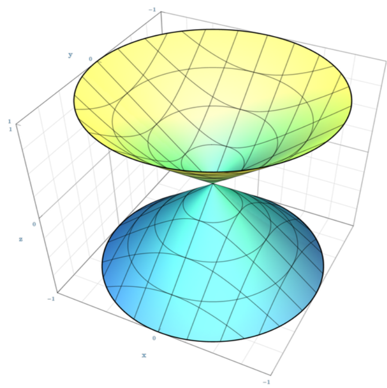
(ג) מקרה פרטי של ההיפרבולואיד הוא החרוט:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



(ד) מקרה פרטי של החרוט הוא חרוט מעגלי:

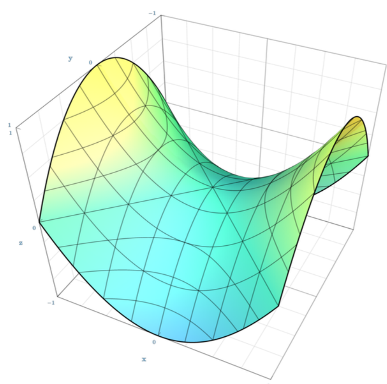
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$$



3. פרבולואיד:

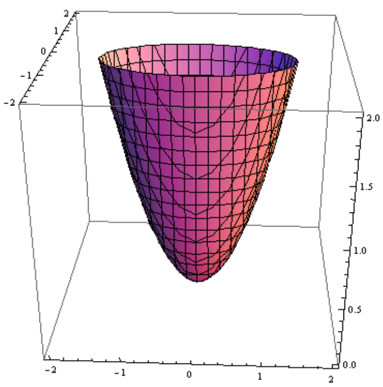
(א) היפרבולי:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



(ב) אליפטי:

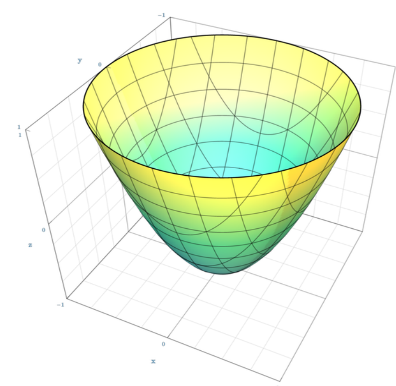
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



כמו בפרבולה במישור, גם בפרבולואיד אחד מהמשתנים לא מופיע במעלה שנייה אלא במעלה ראשונה.

(ג) מקרה פרטי של הפרבולואיד האליפטי הוא הפרבולואיד המעגלי:

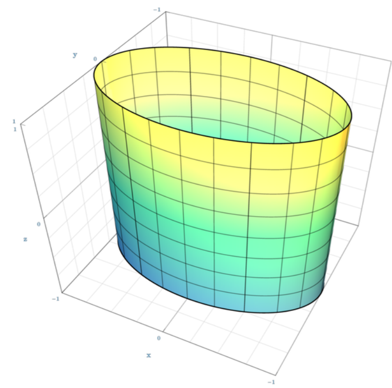
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$$



4. כאשר אחד מהמשתנים לא מופיע, הצורה נקראת **צורה מנוונת** ($degenerate$). משטחים מנוונים הם גלילים:

(א) גליל אליפטי:

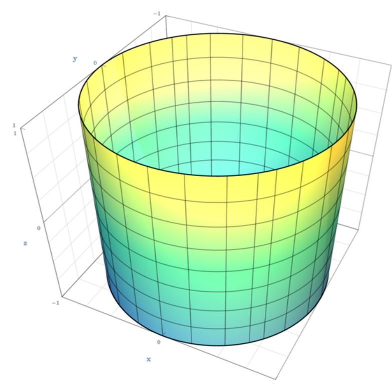
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



במישור היינו מקבלים מעגל, אך במרחב עלינו להתחשב ב$-z$.

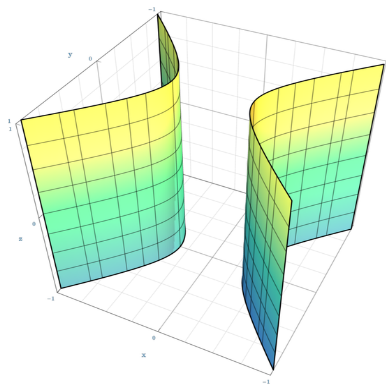
(ב) מקרה פרטי של הגליל האליפטי הוא גליל מעגלי:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



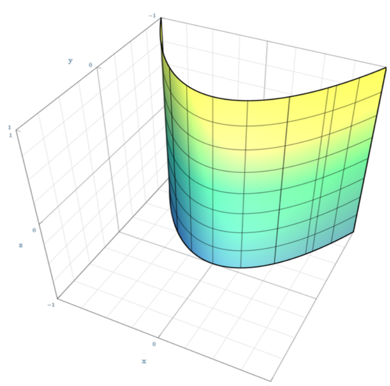
(ג) גליל היפרבולי:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



(ד) גליל פרבולי:

$$x^2 + 2ay$$



<u>תרגיל:</u>

סווגו את המשטח הריבועי הבא:

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 12xy + 6xz + 5x - 6y - 3z = 2$$

<u>פתרון:</u>

המטריצה שלנו היא: $A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}$. נמצא את הע"ע:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-9&-6&-3\\-6&\lambda-5&0\\-3&0&\lambda-5\end{vmatrix}=-3\left(3\left(\lambda-5\right)\right)+\left(\lambda-5\right)\left(\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-9\right)-36\right)=$$

$$=\left(\lambda-5\right)\left(\lambda^2-14\lambda+45-36-9\right)=\lambda\left(\lambda-5\right)\left(\lambda-14\right)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=0,5,14$.
נמצא וקטורים עצמיים מתאימים. עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=0\\6x+5y=0\\3x+5z=0\end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=-\frac{3}{5}x, y=-\frac{6}{5}x$.
לכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}5\\-6\\-3\end{pmatrix}$.
עבור $\lambda=5$:

$$\begin{cases}9x+6y+3z=5x\\6x+5y=5y\\3x+5z=5z\end{cases}$$

נקבל ש: $x=0$, ואם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל: $z=-2y$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda=14$:

$$\begin{cases} 9x+6y+3z=14x \\ 6x+5y=14y \\ 3x+5z=14z \end{cases}$$

מהמשוואות השנייה והשלישית נקבל: $z=\frac{1}{3}x, y=\frac{2}{3}x$, ולכן אפשר לבחור:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ננרמל ונקבל: $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

אם כך, המטריצה המלכסנת P והאלכסונית D הן:

$$D=\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

התבנית שלנו היא:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2$$

נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2$$

נשים לב שמתקיים:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{70}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\sqrt{70}z'$$

ולכן בקואורדינטות החדשות נקבל:

$$14\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 - \sqrt{70}z' - 2 = 0$$

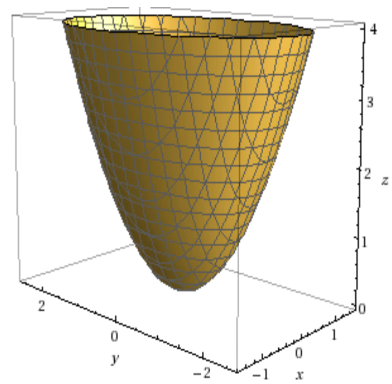
נעביר אגף ונקבל:

$$14\left(x'\right)^2 + 5\left(y'\right)^2 = \sqrt{70}\left(z' + \frac{2}{\sqrt{70}}\right)$$

נסמן: $z' + \frac{2}{\sqrt{70}} = z''$, נחלק ב־$\sqrt{70}$ ונקבל:

$$\frac{14\left(x'\right)^2}{\sqrt{70}} + \frac{5\left(y'\right)^2}{\sqrt{70}} = z''$$

וזהו פרבולואיד אליפטי.



4.5 נקודות קריטיות של פונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

ההגדרה והתהליך המפורט נמצאים בקורס אינפי 3. כאן רק נזכיר את מה שחשוב בקורס הזה.

הגדרה 4.7 **נקודה קריטית** של פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא נקודה שבה $\nabla f=0$.

נקודה קריטית יכולה להיות נקודת מינימום, נקודת מקסימום או נקודת אוכף.

את סוג הנקודה קובעים באמצעות מטריצת ההסיאן:

$$H_f=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$$

הערה 4.8 אנו נעסוק רק בפונקציות גזירות ברציפות פעמיים, עבורן $f_{xy}=f_{yx}$. במצב כזה H_f סימטרית ולכן תמיד יש לה ערכים עצמיים ב־$\mathbb{R}$.

בעזרת הערכים העצמיים קובעים את סוג הנקודה.

אם שני הערכים העצמיים חיוביים, זו נקודת מינימום.
אם שניהם שליליים, זו נקודת מקסימום.
אם לערכים העצמיים סימנים שונים, זו נקודת אוכף.

אנו יודעים ש: $\det H_f=\lambda_1\lambda_2, trH_f=\lambda_1+\lambda_2$.
לכן, אפשר לנסח תנאי זה גם באופן הבא:
אם $\det H_f<0$, זו נקודת אוכף.

אם $\det H_f > 0$ ובנוסף $trH_f > 0$ זו נקודת מינימום.
אם $\det H_f > 0$ ובנוסף $trH_f < 0$ זו נקודת מקסימום.

הערה 4.9 כאשר אחד מהערכים העצמיים מתאפס, עלינו לבדוק את סוג הנקודה "ידנית".

תרגיל:

מצאו את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה:

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

וסווגו אותן.

פתרון:

נשווה את הגרידאנט ל-0:

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ f_y = 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל: $2y(x+1) = 0$.
אם $x = -1$, מהמשוואה הראשונה נקבל: $y^2 - 4 = 0$, והנקודות הן: $(-1, \pm 2)$.
אם $y = 0$, מהמשוואה השנייה נקבל $6x^2 + 10x = 0$, והנקודות הן: $\left(-\frac{5}{3}, 0\right), (0,0)$.
מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}$$

נבדוק מה קורה בכל אחת מהנקודות:

$$H_f(-1,2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

שוב, שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

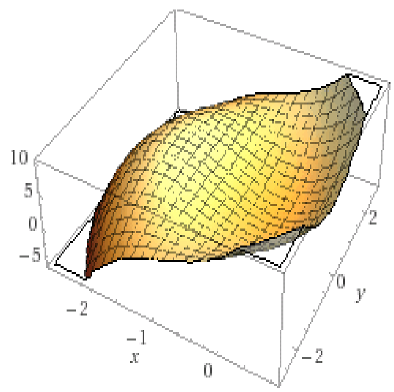
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

$$H_f\left(-\frac{5}{3},0\right)=\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

שני הע"ע שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.

הגרף נראה כך:



תרגילים נוספים

1. סווגו את התבניות הריבועיות הבאות ומצאו להן צורה קנונית:

(א) $2x^2 + y^2 + 3y = 0$.

(ב) $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 5y + 10 = 0$.

(ג) $-\frac{11}{196}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{28}xy - \frac{1}{16}y^2 + \frac{11}{14}x - \frac{5\sqrt{3}}{4}y - \frac{11}{4} = 0$.

(ד) $4x^2 + y^2 - 40x + 6y + 93 = 0$.

(ה) $xy - 2x - 6y + 11 = 0$.

(ו) $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$.

2. סווגו את המשטחים הריבועיים הבאים על ידי הבאתם לצורה קנונית.

(א) $6x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2\sqrt{2}x\left(y+z\right) + 2yz = 1$.

(ב) $3x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy - 12yz - 8xz = 1$.

(ג) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}\left(x+y+z\right)^2$.

(ד) $\left(z - 2x - 3y\right)\left(2z - 5x + 1\right) = 0$.

(ה) $\frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{2y}{3} - \frac{8xy}{9} + \frac{4y^2}{9} + \frac{2z}{3} + \frac{4xz}{9} - \frac{4yz}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$.

(ו) $-2x^2 - y^2 - 2z^2 + xz = 1$.

3. מצאו וסווגו את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות.

(א) $f\left(x,y\right) = 3\left(x^2+y^2\right) + x^3 + 4y$.

(ב) $f\left(x,y\right) = x^3 + y^3 - 3xy$.

פתרונות

1. בכל אחת מהתבניות נמצא את הע"ע של המטריצה. הצורה הקנונית אינה חד־משמעית, ואפשר להגיע בכל שאלה לצורות שונות.

(א) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה כבר אלכסונית. הע"ע הם $1, 2$, ולכן זו אליפסה.
לאחר השלמה לריבוע אפשר לקבל את הצורה הקנונית:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כאשר $a^2 = \frac{9}{8}, b^2 = \frac{9}{4}$.

(ב) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2 \pm \sqrt{2}$ ולכן זו אליפסה.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית).

נשלים לריבוע. מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1$$

כאשר $a^2 = \frac{47}{8(2+\sqrt{2})}, b^2 = \frac{47}{8(2-\sqrt{2})}$.

כמובן שאין נקודות במישור שמקיימות את המשוואה, ולכן הגרף הוא ריק (אפשר לקרוא לו "אליפסה דמיונית").

(ג) המטריצה שלנו היא:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{196} & \frac{5\sqrt{3}}{56} \\ \frac{5\sqrt{3}}{56} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\frac{-93\pm5\sqrt{2353}}{1568}$, ולכן זו היפרבולה.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית).

נשלים לריבוע. מקבלים:

$$(y')^2 = (mx')^2$$

כאשר $m^2 = \frac{33737+465\sqrt{2353}}{25088}$. אלו שני ישרים.

(ד) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיא כבר אלכסונית. הע"ע הם $1, 4$. לכן זו אליפסה.
לאחר השלמה לריבוע מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{16} = 1$$

(ה) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\pm\frac{1}{2}$. לכן זו היפרבולה.

הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

נציב $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית).

נשלים לריבוע. מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

(ו) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-1,3$ ולכן זו היפרבולה.

הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ כאשר P היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{6}-\frac{(y')^2}{2}=1$$

2. נביא את התבניות הריבועיות לצורה קנונית.

(א) המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}6 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 5 & 1\\ \sqrt{2} & 1 & 5\end{pmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \lambda-5 & -1\\ -\sqrt{2} & -1 & \lambda-5\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-6)\left((\lambda-5)^2-1\right)+\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}(\lambda-5)-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}(\lambda-5)\right)=$$

$$=(\lambda-6)\left(\lambda^2-10\lambda+24\right)-2\left((\lambda-5)+1\right)-2\left(1+(\lambda-5)\right)=$$

$$=(\lambda-6)^2(\lambda-4)-4(\lambda-4)=(\lambda-4)\left(\lambda^2-12\lambda+32\right)=$$

$$=(\lambda-4)^2(\lambda-8)$$

הע"ע הם $\lambda=4,4,8$.

אם נציב $\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

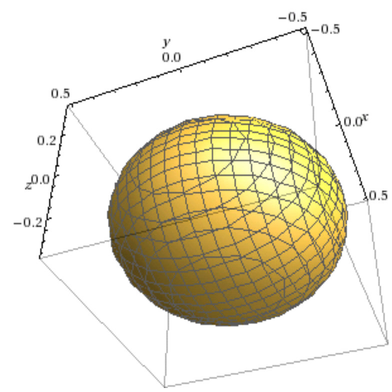
נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$4\left(x'\right)^2 + 4\left(y'\right)^2 + 8\left(z'\right)^2 = 1$$

זהו אליפסואיד.



(ב) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 3, 6, -9$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

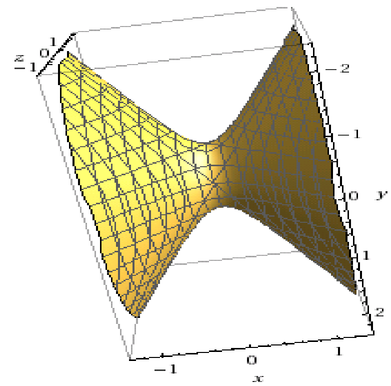
נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 1$$

כלומר:

$$-9\left(x'\right)^2 + 3\left(y'\right)^2 + 6\left(z'\right)^2 = 1$$

זהו היפרבולואיד חד־יריעתי.



(ג) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{3}{2}\left(xy+xz+yz\right)=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=-\frac{5}{4},1,1$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית,

נקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=0$$

כלומר:

$$-\frac{5}{4}\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2=0$$

זהו חרוט.

(ד) ראשית נפתח את הביטוי כדי לקבל את ההצגה המוכרת והאהובה:

$$2z^2-5xz+z-4xz+10x^2-2x-6yz+15xy-3y=0$$

כלומר:

$$10x^2+2z^2+15xy-9xz-6yz-2x-3y+z=0$$

לפיכך, המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}10&\frac{15}{2}&-\frac{9}{2}\\ \frac{15}{2}&0&-3\\ -\frac{9}{2}&-3&2\end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda=\frac{12\pm\sqrt{406}}{2},0$.

מכיוון שיש לנו ביטויים של x,y,z כבודדים, נצטרך למצוא את המטריצה המלכסנת במפורש.

הוקטורים העצמיים המתאימים לע"ע הם: $\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{15}\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-82\pm\sqrt{406}}{27}\\ \frac{29\mp2\sqrt{406}}{9}\\ 1\end{pmatrix}$. אנו צריכים לנרמל אותם:

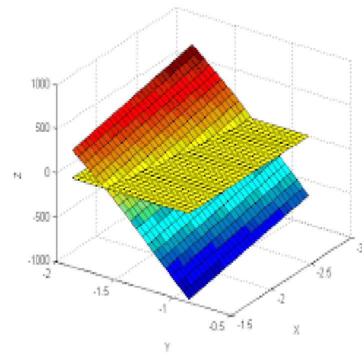
$$\frac{1}{\sqrt{7.8237}}\begin{pmatrix}\frac{-82+\sqrt{406}}{27}\\ \frac{29-2\sqrt{406}}{9}\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{74.6015}}\begin{pmatrix}\frac{-82-\sqrt{406}}{27}\\ \frac{29+2\sqrt{406}}{9}\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{1.1644}}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{15}\\ 1\end{pmatrix}$$

אלו עמודות המטריצה המלכסנת P.

אם נציב $\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y^2=\frac{275+12\sqrt{406}}{131}x^2$$

במישור אלו שני ישרים, אך במרחב התלת מימדי אלו שני מישורים.



(ה) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = 1, 0, 0$.

הו"ע המתאימים הם: $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

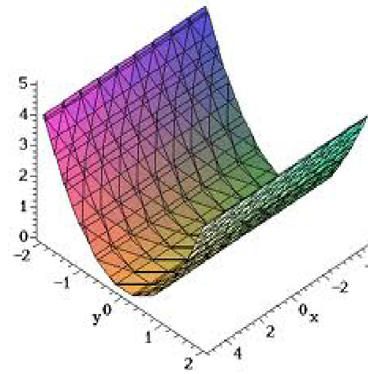
ננרמל אותם ונקבל שהמטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ונשלים לריבוע נקבל:

$$y = x^2$$

במישור זוהי פרבולה; במרחב זהו גליל פרבולי.



(ו) המטריצה היא: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

הע"ע הם $\lambda = -1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$.

אם נציב $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ כאשר P מטריצה מלכסנת אורתוגונאלית, נקבל:

$$-\left(x'\right)^2 - \frac{3}{2}\left(y'\right)^2 - \frac{5}{2}\left(z'\right)^2 = 1$$

זהו אליפסואיד "דמיוני", קבוצה ריקה.

3. נשווה את הגרדיאנט ל-0 ונסווג באמצעות ההסיאן.

(א) נשווה $\nabla f = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x = 6x + 3x^2 = 0 \\ f_y = 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $x = 0, -2$ ומהמשוואה השנייה נקבל $y = -\frac{2}{3}$, ולכן הנקודות הן:

$$\left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$$

ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

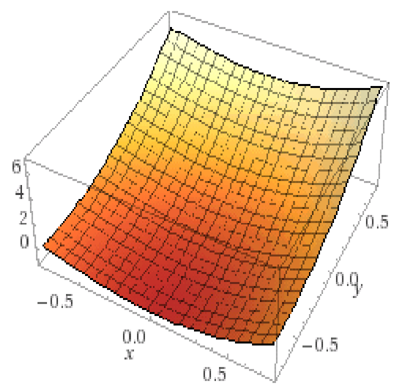
לפיכך:

$$H_f\left(0,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.
באופן דומה:

$$H_f\left(-2,-\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.
הגרף נראה כך:



(ב) נשווה $\nabla f=0$ ונקבל:

$$\begin{cases} f_x=-3y+3x^2=0 \\ f_y=-3x+3y^2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $y=x^2$. נציב זאת במשוואה השנייה:

$$-3x+3x^4=0$$

ולכן $x=0,1$ והנקודות הן:

$$(0,0)\,,(1,1)$$

ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

לפיכך:

$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

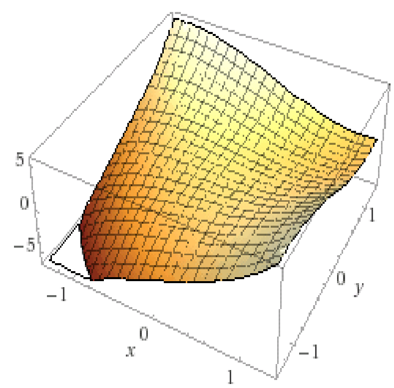
הע"ע שניהם חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

באופן דומה:

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

לע"ע סימנים שונים ולכן זו נקודת אוכף.

הגרף נראה כך:



5 עקומות

5.1 מבוא

עקומה היא גרף חד־מימדי במרחב n מימדי.

בקורס הזה נתעסק בעקומות מישוריות (ב־$\mathbb{R}^2$) ובעקומות מרחביות (ב־$\mathbb{R}^3$; בדרך כלל על משטחים).

5.1.1 הצגה סתומה ופרמטריזציה

עקומות מישוריות אפשר להציג בשתי דרכים.

דרך אחת היא בצורה סתומה: $F(x,y)=0$.

כבר ראינו דוגמאות לעקומות כאלו ־ אליפסה, פרבולה וכן הלאה.

הדרך השנייה (בה אפשר להציג עקומה מכל מימד) היא באמצעות **פרמטריזציה.**

פרמטריזציה של עקומה היא פונקציה $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

לדוגמה:

1. קטע בין שתי נקודות a,b:

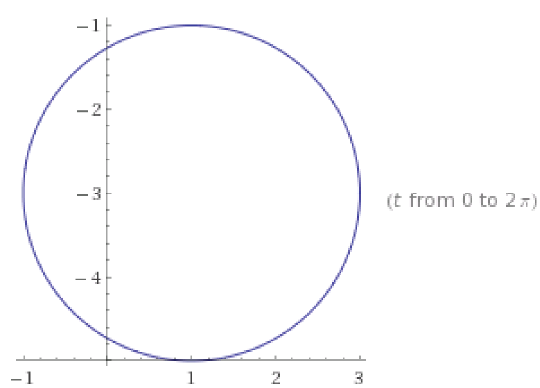
$$\alpha(t)=a(1-t)+bt, t\in[0,1]$$

2. מעגל קנוני עם רדיוס 1:

$$\alpha(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$$

באופן כללי, מעגל עם רדיוס R שמרכזו בנקודה (a,b):

$$\alpha(t)=(a+R\cos t,b+R\sin t), t\in[0,2\pi]$$



ומה יקרה אם נשנה את התחום?

למשל, אם התחום יהיה $t\in[0,4\pi]$ נקבל את אותו המעגל, אבל בכל נקודה על המעגל העקומה עוברת פעמיים! נתייחס לכך בהמשך.

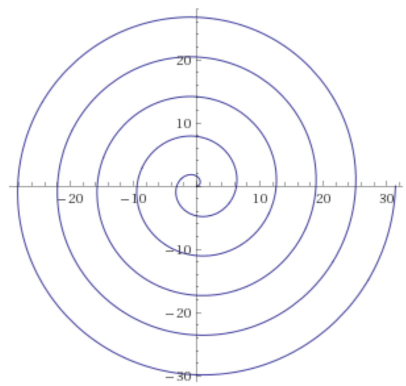
3. אליפסה עם מרכז בראשית הצירים ומוקדים a,b:

$$\alpha\left(t\right)=\left(a\cos t,b\sin t\right),t\in\left[0,2\pi\right]$$

4. מה יקרה אם במקום R בפרמטריזציה של המעגל נשים t:

$$\alpha\left(t\right)=\left(t\cos t,t\sin t\right),t\in\left[0,10\pi\right]$$

ה"רדיוס" כל הזמן משתנה ולכן נקבל ספירלה:



הערה 5.1 כדי להציג עקומה ב־$\mathbb{R}^n$ בצורה סתומה, נצטרך $n-1$ משוואות בלתי תלויות.

<u>תרגיל:</u>

מצאו פרמטריזציה של מעגל היחידה, לא כולל הנקודה $(-1,0)$, באמצעות t שהוא המרחק בין הראשית לחיתוך של ציר ה־y והמיתר בין הנקודה ל־$(-1,0)$ (כלומר, נקודת החיתוך עם ציר ה־y).

<u>פתרון:</u>

נתאר את הנקודות (x,y) שנמצאות על המעגל באמצעות t.

המיתר בין $(-1,0)$ לנקודה (x,y) חותך את ציר ה־y בנקודה $(0,t)$; t הרי מוגדר להיות המרחק בין הראשית לחיתוך עם ציר ה־y של המיתר.

לכן, שיפוע המיתר הוא:

$$M=\frac{t-0}{0-(-1)}=t$$

ולכן משוואת המיתר היא:

$$y - 0 = t\left(x - (-1)\right)$$

כלומר $y = t\left(x+1\right)$. הנקודה (x, y) שלנו נמצאת על המיתר ועל המעגל, ולכן אפשר להציב את משוואת המיתר במשוואת המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + \left(t\left(x+1\right)\right)^2 = 1$$

$$\left(1+t^2\right)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

זו משוואה ריבועית; נפתור אותה:

$$x_{1,2} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{\left(2t^2\right)^2 - 4\left(1+t^2\right)\left(t^2-1\right)}}{2\left(1+t^2\right)} = \frac{-2t^2 \pm 2}{2\left(1+t^2\right)}$$

אם נבחר במינוס נקבל $x = -1$ והוא לא מתאים; לכן, נבחר בפלוס ונקבל:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ולכן:

$$y = t\left(x+1\right) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = t\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

כלומר, הפרמטריזציה שלנו תהיה:

$$\alpha\left(t\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$. נשים לב שאכן קיבלנו את מעגל היחידה:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$$

5.1.2 אורך של עקומה

הגדרה 5.2 עבור עקומה $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נגדיר כמה הגדרות:

א. **וקטור המשיק** לעקומה γ הוא וקטור הנגזרות: $\alpha'(t)$.

ב. עקומה נקראת **פשוטה** אם היא חח"ע. אינטואיטיבית, פירוש הדבר שהעקומה אינה חותכת את עצמה.

ג. עקומה נקראת **סגורה** אם $\alpha(a)=\alpha(b)$.

ד. עקומה נקראת **רגולרית** אם לכל t המשיק לא מתאפס: $\alpha'(t)\neq 0$.

ה. עקומה נקראת **חלקה** אם היא גזירה ברציפות ורגולרית.

ו. עקומה נקראת **חלקה למקוטעין** (ובאופן דומה גזירה ברציפות למקוטעין) אם היא חלקה פרט למספר סופי של נקודות.

ז. נגדיר **אורך של עקומה** להיות:

$$L(\alpha)=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}\|\alpha(t_k)-\alpha(t_{k+1})\|\right\}$$

כאשר הסופרימום רץ על כל $n\in\mathbb{N}$ ועל כל חלוקה של הקטע $[a,b]$. למעשה, זהו הסופרימום של אורכי העקומות שמקרבות את α המורכבות מקטעים ישרים (עקומות פוליגונליות).

עקומה שלה אורך סופי נקראת **עקומה בעלת אורך**.

ח. אם העקומה שלנו חלקה, אפשר לחשב את אורכה ע"י הנוסחה:

$$L(\alpha)=\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,dt$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את אורך העקומה $\alpha(t)=\left(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t\right)$ כאשר $t\in[0,1]$.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שהעקומה שלנו חלקה. וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}\right)$$

ולכן:

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}=e^t+e^{-t}$$

ואם כן האורך שלנו יהיה:

$$L\left(\alpha\right)=\int\limits_{0}^{1}\left(e^{t}+e^{-t}\right)dt=e-\frac{1}{e}$$

<u>תרגיל:</u>
נגדיר $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{x}\right) & x\neq0\\0 & x=0\end{cases}$$

ונגדיר עקומה $\alpha\left(t\right)=\left(t,f\left(t\right)\right)$ כאשר $t\in[0,1]$. האם העקומה הנ"ל היא בעלת אורך?
<u>פתרון:</u>
לא. נשים לב שעבור $k\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\begin{cases}\frac{1}{k} & k=2m\\-\frac{1}{k} & k=2m+1\end{cases}$$

ונקבל:

$$||\alpha\left(\frac{1}{k}\right)-\alpha\left(\frac{1}{k+1}\right)||\geq|f\left(\frac{1}{k}\right)-f\left(\frac{1}{k+1}\right)|\geq\frac{1}{k}$$

ואם נתבונן בחלוקות: $T_{n}:0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\cdots<\frac{1}{2}<1$ אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה זו יהיה גדול מהסכום:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

שמתבדר לאינסוף כאשר $n\to\infty$. לכן העקומה אינה בעלת אורך.

הערה 5.3 נתבונן בשתי העקומות:

$$\alpha_{1}\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right),t\in[0,2\pi]$$

$$\alpha_{2}\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right),t\in[0,4\pi]$$

מבחינה גרפית, מדובר על אותן העקומות, אך האורך שלהן לפי הנוסחה שונה. זאת, מכיוון ש־α_2 עוברת בכל נקודה במעגל פעמיים (ומתקבל מעגל "עם שתי שכבות").
לעומת זאת, העקומה:

$$\alpha_3\left(t\right)=\left(\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\right),t\in\left[0,4\pi\right]$$

מתארת את אותה העקומה בדיוק כמו α_1. לכן:

1. נתייחס אל פרמטריזציות שמתארות את אותו הגרף אך נותנות אורך שונה כמתארות עקומות שונות.
2. פרמטריזציות שונות יכולות לתאר את אותה העקומה (עם אותו האורך).

5.1.3 הפרמטריזציה הטבעית

הגדרה 5.4 לכל עקומה קיימות הרבה פרמטריזציות שונות. **הפרמטריזציה הטבעית** נתונה על ידי הנוסחה:

$$s\left(t\right)=\int\limits_0^t\left\|\alpha'\left(x\right)\right\|dx$$

כאשר $\alpha\left(t\right)$ היא פרמטריזציה כלשהי של העקומה.
זו s כפונקציה של t. ממנה מחלצים את t כפונקציה של s ומציבים ב־α.
פרמטריזציה זו נקראת גם **פרמטריזציית אורך קשת** (חשבו על הנוסחה לחישוב אורך עקומה) וגם **פרמטריזציה במהירות יחידה**.
בפרמטריזציה זו, $\left\|\alpha'\left(t\left(s\right)\right)\right\|=\left\|\alpha'\left(s\right)\right\|=1$, כלומר המשיק הוא תמיד משיק יחידה.
לא תמיד פשוט למצוא פרמטריזציה טבעית.

<u>תרגיל:</u>
מצאו פרמטר טבעי לעקומות המישוריות הבאות:
א. $y=mx+n$.
<u>פתרון:</u>
קודם כל, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\alpha\left(t\right)=\left(t,mt+n\right)$$

אם כן: $\alpha'\left(t\right)=\left(1,m\right)$ ולכן: $\left\|\alpha'\left(t\right)\right\|=\sqrt{1+m^2}$. לכן:

$$s\left(t\right)=\int\limits_0^t\left\|\alpha'\left(x\right)\right\|dx=\int\limits_0^t\sqrt{1+m^2}dx=t\sqrt{1+m^2}$$

ולכן אם נבטא את t כפונקציה של s נקבל:

$$t\left(s\right)=\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}}$$

והפרמטריזציה החדשה תהיה:

$$\alpha\left(s\right)=\left(\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}},\frac{ms}{\sqrt{1+m^{2}}}+n\right)$$

ואפשר לראות שאכן $\left\|\alpha'\left(s\right)\right\|=1$.

ב. $y=x^{2}$.

<u>פתרון:</u>

שוב, ניקח פרמטריזציה כלשהי של העקומה, למשל:

$$\alpha\left(t\right)=\left(t,t^{2}\right)$$

אם כן: $\alpha'\left(t\right)=\left(1,2t\right)$ ולכן $\|\alpha'(t)\|=\sqrt{1+4t^{2}}$. לכן:

$$s\left(t\right)=\int_{0}^{t}\left\|\alpha'\left(x\right)\right\|dx=\int_{0}^{t}\sqrt{1+4x^{2}}dx$$

זהו אינטגרל טריוויאלי. ונקבל:

$$s\left(t\right)=t\sqrt{\frac{1}{4}+t^{2}}+\frac{\ln\left(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^{2}}\right)}{4}$$

ולא פשוט להפוך ולבטא את t כפונקציה של s. אם כן, פרמטריזציה טבעית היא לא תמיד קלה להשגה.

<u>תרגיל:</u>

האם הפרמטריזציה הבאה של מעגל היחידה:

$$\alpha\left(t\right)=\left(\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}},\frac{2t}{1+t^{2}}\right)$$

כאשר $t\in\mathbb{R}$, אותה ראינו בשאלה קודמת, היא פרמטריזציה טבעית?

מהו אורך העקומה?

<u>פתרון:</u>

וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2},\frac{2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)$$

ולכן:

$$\left\|\alpha'(t)\right\|=\sqrt{\frac{16t^2}{\left(1+t^2\right)^4}+\frac{4-8t^2+4t^4}{\left(1+t^2\right)^4}}=\sqrt{\frac{4\left(t^4+2t^2+1\right)}{\left(1+t^2\right)^4}}=\frac{2}{1+t^2}\neq 1$$

והפרמטריזציה אינה טבעית. האורך הוא:

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left\|\alpha'(t)\right\|dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=\lim_{a\longrightarrow\infty}2\arctan t\Big|_{-a}^{a}=2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\pi$$

וזהו אכן ההיקף של מעגל היחידה.

5.2 עקמומיות (של עקומות מישוריות)

בהינתן עקומה, אנו מעוניינים לדעת עד כמה היא, ובכן, עקומה.

העקמומיות היא מדד המודד זאת. איך נחליט עד כמה כל עקומה באמת עקומה?

דרך א': נתחיל בקו ישר. מה תהיה העקמומיות של קו ישר? קו ישר כלל אינו עקום, הרי הוא ישר! לכן העקמומיות של קו ישר היא 0.

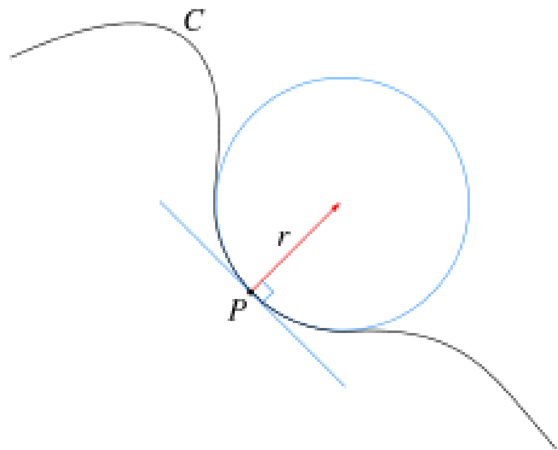
העקומח הבאה בתור אחרי קו ישר היא מעגל. עד כמה מעגל עקום? נשים לב שככל המעגל גדול יותר, הוא פחות עקום; ככל שהמעגל קטן יותר, אנחנו מתעקמים יותר מהר לאורך המעגל.

אפשר להסתכל על זה גם באופן הבא - ככל שהמעגל יותר גדול, לוקאלית הוא יותר דומה לקו ישר, ולכן העקמומיות שלו קטנה.

לפיכך, עקמומיותו של מעגל צריכה להיות מוגדרת ביחס הפוך להיקפו של המעגל, וההגדרה הטבעית ביותר לעקמומיות של מעגל עם רדיוס R, אם כן, תהיה $\frac{1}{R}$.

איך נכליל זאת לעקומה כלשהי? בכל נקודה על העקומה, p, נקרב את העקומה על ידי מעגל נושק (אסקלטורי) C_p עם רדיוס r_p, והעקמומיות בנקודה תהיה $k(p)=\frac{1}{r_p}$.

שימו לב שהעקמומיות תלויה בנקודה (בניגוד לקו הישר והמעגל בהם העקמומיות קבועה).



הרדיוס r_p מכונה **רדיוס העקמומיות** ומרכז המעגל הנושק מכונה **מרכז העקמומיות**.

דרך ב': אפשר להגדיר עקמומיות כ"מהירות שבה העקומה משנה כיוון".

אם כך, אפשר במקום להסתכל על מהירות השינוי של כיוון העקומה, להסתכל על מהירות כיוון השינוי של הוקטורים המשיקים.

כדי להגדיר עקמומיות כך, יש בראש ובראשונה לשים לב שהמהירות לאורך כל העקומה שווה, אחרת אין משמעות למדידת מהירות השינוי. למשל, אם פרמטריזציה מסוימת של המעגל מתקדמת לאורך הקשת התחתונה במהירות מסוימת ולאורך הקשת העליונה במהירות כפולה, ברור שהשינוי בקשת העליונה יהיה יותר מהיר, למרות שגיאומטרית אין כל הבדל בין הקשתות! לכן, אם אנו ניגשים לעקמומיות בדרך זו, עלינו לעבוד עם הפרמטריזציה הטבעית, שהיא (כמו שאמרנו) פרמטריזציה במהירות יחידה.

אם כן, הוקטורים המשיקים הם $\alpha'(s)$, ולכן השינוי בהם ניתן על ידי נגזרתם, הלא היא $\alpha''(s)$. אנו רוצים להגדיר את העקמומיות כמהירות בשינוי, כלומר את הגודל של הוקטורים $\alpha''(s)$ ולכן נגדיר:

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|$$

די אינטואיטיבי בסך הכל.

הגדרה 5.5 תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה. **העקמומיות** של העקומה נתונה על ידי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

משפט 5.6 נניח שהעקומה α נתונה בפרמטריזציה טבעית. נסמן ב$-$ $\theta\left(s\right)$ את הזווית בין וקטור המשיק α' לציר ה$-x$. אזי:

$$k\left(s\right)=\theta'\left(s\right)$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את העקמומיות של מעגל היחידה:

$$\alpha\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right)$$

<u>פתרון:</u>

וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'\left(t\right)=\left(-\sin t,\cos t\right)$$

ומתקיים:

$$\left\Vert \alpha'\left(t\right)\right\Vert =1$$

והעקומה בפרמטריזציה טבעית. לכן:

$$k=\left\Vert \alpha''\left(t\right)\right\Vert =\left\Vert \left(-\cos t,-\sin t\right)\right\Vert =1$$

טענה 5.7 כלל לייבניץ:

$$\left\langle f,g\right\rangle '=\left\langle f',g\right\rangle +\left\langle g',f\right\rangle$$

עבור $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n}$. נוכיח זאת.

נסמן: $f=\left(f_{1}\left(t\right),\ldots,f_{n}\left(t\right)\right),g=\left(g_{1}\left(t\right),\ldots,g_{n}\left(t\right)\right)$. כעת:

$$\left\langle f,g\right\rangle '=\left(\sum_{i=1}^{n}f_{i}g_{i}\right)'=\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i}g_{i}\right)'=\sum_{i=1}^{n}\left(f_{i}'g_{i}+g_{i}'f_{i}\right)=\left\langle f',g\right\rangle +\left\langle g',f\right\rangle$$

תרגילון:

מצאו את העקמומיות של עקומה הנתונה על ידי גרף הפונקציה: $y = f(x)$.

פתרון:

פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

לכן: $\alpha'(t) = (1, f'(t)), \alpha''(t) = (0, f''(t))$ ולפי הנוסחה:

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \cdots = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

תרגיל:

איך משפיע היפוך כיוון התנועה על העקמומיות של עקומה $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^2$?

פתרון:

נגדיר את העקומה בכיוון ההפוך:

$$\delta(t) = \alpha(T - t)$$

לפי כלל השרשרת:

$$\delta'(t) = (T - t)' \cdot \alpha'(T - t) = -\alpha'$$

$$\delta'' = \alpha''$$

ולכן לפי הנוסחה:

$$k_\delta = \frac{\det(\delta'(t), \delta''(t))}{\|\delta'(t)\|^3} = \frac{\det(-\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|-\alpha'(t)\|^3} = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = -k_\alpha$$

נזכור שפעולת כפל שורה/עמודה בקבוע מכפילה את הדטרמיננטה בקבוע (במקרה שלנו, -1).

מסקנה 5.8 היפוך כיוון העקומה הופך את סימן העקמומיות.

5.2.1 חישוב עקמומיות בצורה סתומה

אנו יודעים שאפשר להציג עקומות גם בצורה סתומה: $F\left(x,y\right)=0$, ולא רק על ידי פרמטריזציה.

כאשר עקומה נתונה בצורה סתומה, אפשר לחשב את העקמומיות על ידי הנוסחה:

$$|k|=\left|\nabla\cdot\frac{\nabla F\left(x,y\right)}{\left\Vert \nabla F\left(x,y\right)\right\Vert }\right|$$

כלומר דיברגנץ של הגרדיאנט המנורמל.

שימו לב שאנו יכולים לחשב רק את העקמומיות בערך מוחלט ולא את העקמומיות ממש.

זאת מכיוון שבצורה סתומה, בניגוד לפרמטריזציה, אין לנו ידע על כיוון ההתקדמות של העקומה (אין כזה), וראינו שמה שקובע את סימן העקמומיות הוא כיוון ההתקדמות של העקומה.

אפשר לחשב את העקמומיות בצורה נוספת, על ידי נוסחת בייטמן $(Bateman)$:

$$|k|=\left|\frac{D_{B}\left(F\right)}{\left\Vert \nabla F\left(x,y\right)\right\Vert ^{3}}\right|=\frac{\left|F_{xx}F_{y}^{2}-2F_{xy}F_{x}F_{y}+F_{yy}F_{x}^{2}\right|}{\left(\sqrt{F_{x}^{2}+F_{y}^{2}}\right)^{3}}$$

האופרטור D_{B} נקרא אופרטור בייטמן.

את אופרטור בייטמן אפשר גם לכתוב בצורה מטריציונית:

$$D_{B}\left(F\right)=-\begin{vmatrix}0 & F_{x} & F_{y}\\
F_{x} & F_{xx} & F_{xy}\\
F_{y} & F_{yx} & F_{yy}
\end{vmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את העקמומיות המקסימלית של הפרבולה $y=x^{2}$.

<u>פתרון:</u>

אפשר להגדיר פרמטריזציה $\alpha\left(t\right)=\left(t,t^{2}\right)$, ולחשב לפי הנוסחה $k\left(t\right)=\frac{\det\left(\alpha'(t),\alpha''(t)\right)}{\left\Vert \alpha'(t)\right\Vert ^{3}}$.
נשתמש בנוסחת בייטמן. הפונקציה F היא: $F\left(x,y\right)=y-x^{2}=0$. כעת:

$$F_{x}=-2x,F_{y}=1$$

$$F_{xx}=-2,F_{xy}=0,F_{yy}=0$$

ולכן:

$$|k| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3} = \frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3} = \frac{2}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x = 0$ (למתקדמים: גזרו והשוו לאפס), וערכה הוא 2.

תרגילים נוספים

1. חשבו את אורכה של כל אחת מהעקומות הבאות (הניחו שהן בעלות אורך).

   (א) $\alpha(t)=\left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$, כאשר $a>0$ ו־$t\in[0,2\pi]$.

   (ב) $\alpha(t)=(2a\cos t+a\cos 2t, 2a\sin t-a\sin 2t)$, כאשר $a>0$ ו־$t\in[0,2\pi]$.

   (ג) $\alpha(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, כאשר $a>0$ ו־$t\in[0,2\pi]$.

   (ד) $\alpha(t)=(2a\cos t-a\cos 2t, 2a\sin t-a\sin 2t)$, כאשר $a>0$ ו־$t\in[0,2\pi]$.

2. מצאו פרמטריזציה טבעית לעקומות הבאות:

   (א) $\alpha(t)=(1+2\cos t, -3+2\sin t)$.

   (ב) $\alpha(t)=\left(t, \frac{1}{3}\sqrt{(2+t^2)^3}\right)$.

   (ג) $\alpha(t)=\left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$, עבור $a>0$.

3. חשבו את עקמומיותן של העקומות הבאות. פשטו ככל הניתן.

   (א) $\alpha(t)=(1+2\cos t, -3+2\sin t)$.

   (ב) $\alpha(t)=\left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\right)$.

   (ג) $\alpha(s)=\left(\int_0^s\cos(\phi(u))\,du, \int_0^s\sin(\phi(u))\,du\right)$ כאשר $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה. הראו שהפרמטריזציה אכן טבעית.

4. מצאו עקומה שעקמומיותה היא $s^2+s^3+s^4$.

5. תהי $\alpha:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית סגורה הנתונה בפרמטריזציה טבעית. הוכיחו שאם העקמומיות $k(s)$ מונוטונית, היא קבועה.

6. תהי $\beta:[a,b]\to S^2$ עקומה רגולרית, כאשר S^2 היא ספירת היחידה (זו עקומה מרחבית שתמונתה מוכלת בספירה). הוכיחו ש: $\beta\perp\beta'$.

7. חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות:

   (א) אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

   (ב) פרבולה חצי־קובייתית: $x^3-y^2=0$.

פתרונות

1. נשתמש בנוסחה: $L=\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=3a\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt=$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי הזהות $\sin 2t=2\cos t\sin t$ נקבל:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=$$

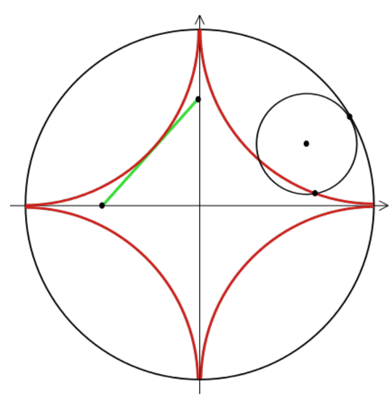
נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיוביות והשליליות של $\sin 2t$:

$$=\frac{3a}{2}\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2tdt+\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל-1, ולכן:

$$L=\frac{3a}{2}\cdot 4=6a$$

עקומה זו נקראת **אסטרואידה.** אסטרואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 4 מרדיוס המעגל הפנימי.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-2a\sin t - 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t + 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2\left(1 + \sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t\right)}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהויות לזווית כפולה:

$$\sin 2t = 2\cos t\sin t, \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt =$$

כעת, נציב $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ ונקבל:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-4\cos^3 t + 3\cos t + 1}dt =$$

נשים לב שמתקיים: $-4\cos^3 t + 3\cos t + 1 = (1 - \cos t)(2\cos t + 1)^2$, ולכן:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} |2\cos t + 1|\sqrt{1 - \cos t}dt =$$

את האינטגרל אפשר לפתור באמצעות זהות לזווית כפולה:

$$\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

ואז: $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, ונקבל את האינטגרל:

$$4a\int_0^{2\pi} \left|(2\cos t + 1)\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

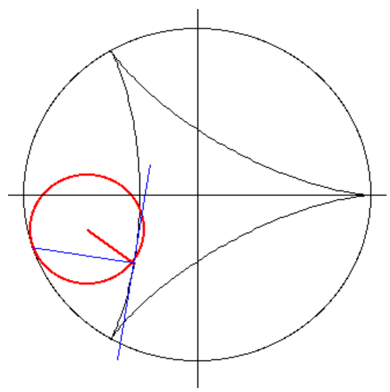
לפי זהות לזווית כפולה: $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$, ולכן:

$$4a\int\limits_0^{2\pi}\left|\left(4\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

לאחר שנפריד את הערך המוחלט לפי תחומים, נציב $u=\cos\frac{t}{2}$ ונקבל $du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$.
מכאן האינטגרל פשוט, ולאחר שחוזרים חזרה ל־t הפתרון הוא $\frac{2}{3}\sqrt{1-\cos 3t}\cot\left(\frac{3t}{2}\right)$.
בתחום שלנו, בכל אופן, נקבל:

$$L = 4a\cdot 4 = 16a$$

עקומה זו נקראת **דלתואידה.** דלתואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 3.



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (a - a\cos t, a\sin t)$$

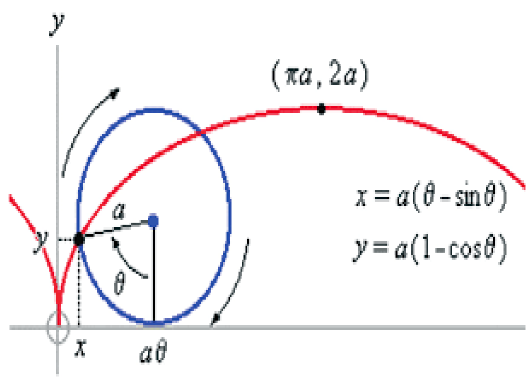
לכן:

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2a^2\left(1-\cos t\right)}dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$, ולכן:

$$=2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 4a\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 4a\cdot 2 = 8a$$

עקומה זו נקראת **ציקלואידה.** ציקלואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



(ד) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-2a\sin t + 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן, בדומה לדלתואידה:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t - 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1 + \sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)}dt =$$

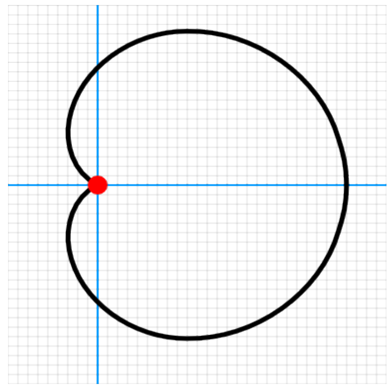
לפי זהויות של זווית כפולה:

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt = 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} =$$

בדומה לציקלואידה, האינטגרל הזה שווה ל–$4\sqrt{2}$, ולכן:

$$L = 2\sqrt{2}a \cdot 4\sqrt{2} = 16a$$

עקומה זו נקראת **קרדיואידה.** קרדיואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) סביב מעגל אחר בעל רדיוס זהה.



מומלץ לחפש ברחבי המרשתת אנימציות המתארות את היווצרות העקומות הללו.

2. נשתמש בנוסחה ל-s וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx = \int_0^t 2dx = 2t$$

לכן, הפרמטר הטבעי יהיה $t = \frac{s}{2}$, והפרמטריזציה הטבעית:

$$\alpha(s) = \left(1 + 2\cos\frac{s}{2}, -3 + 2\sin\frac{s}{2}\right)$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = \left(1, t\sqrt{2+t^2}\right)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\,dx = \int_0^t \sqrt{1 + x^2\left(2 + x^2\right)}dx = \int_0^t \left(1 + x^2\right)dx = \frac{t^3}{3} + t$$

עלינו למצוא את t כביטוי של s.

נתבונן במשוואה:

$$\frac{t^3}{3} + t - s = 0$$

ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית למשוואה ממעלה שלישית. הפתרון הממשי היחיד הוא:

$$t=\sqrt[3]{\frac{3s}{2}+\sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{3s}{2}-\sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}}$$

וזהו הפרמטר הטבעי. כדי למצוא את הפרמטריזציה הטבעית, נציב זאת ב- $\alpha(t)$.

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(x)\|\,dx=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=\int_0^t\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1+\sinh^2 t=\cosh^2 t$.

נחלץ את t ונקבל: $t(s)=a\cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב- $\alpha(t)$, לאחר שנשתמש בזהויות של הפונקציות ההיפרבוליות נקבל:

$$\alpha(s)=\left(a\cdot arcsinh\frac{s}{a},a\sqrt{a^2+s^2}\right)$$

וזוהי הפרמטריזציה הטבעית.

3. אם ניתן, נשתמש בנוסחה לפרמטריזציה טבעית. אחרת, נשתמש בנוסחה הכללית.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

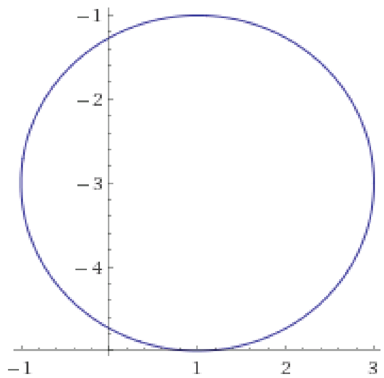
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(t)=(-2\cos t,-2\sin t)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\begin{vmatrix}-2\sin t & -2\cos t\\ 2\cos t & -2\sin t\end{vmatrix}}{\left(4\cos^2 t+4\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

זהו מעגל שרדיוסו 2, ולכן הגיוני שעקמומיותו תהיה $\frac{1}{2}$.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

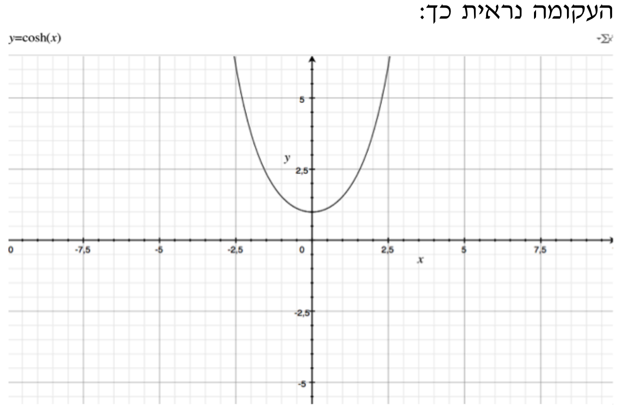
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(t)=\left(0,\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\end{vmatrix}}{\left(1+\sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\cosh^3\frac{t}{a}}=\frac{1}{a\cosh^2\frac{t}{a}}$$

העקומה נראית כך:



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)))$$

ולכן:

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$$

וזו אכן פרמטריזציה טבעית.

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(s) = (-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s), \cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))$$

ולכן:

$$k(s) = \sqrt{(-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2 + (\cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2} = \phi'(s)$$

4. נתבונן בפונקציה $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\phi(s) = \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3}$$

לפי הסעיף האחרון בשאלה הקודמת, נקבל שעקמומיותה של העקומה:

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du \right)$$

היא $\phi'(s)$, כלומר $s^4 + s^3 + s^2$ כנדרש.

5. נניח בה"כ שהעקמומיות מונוטונית עולה.
לכן, לכל $0 \le a \le b \le L$ מתקיים: $k(a) \le k(b)$.
העקומה סגורה, ובפרט $k(0) = k(L)$.
נקבל שלכל $0 \le a \le L$ מתקיים: $k(a) = k(0)$, והעקמומיות קבועה.

6. $\beta(t) \in S^2$ לכל $t \in [a,b]$, ולכן $\|\beta(t)\| = 1$. לכן גם $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$.
לפיכך, אם נגזור נקבל:

$$\langle \beta(t), \beta(t) \rangle' = (1)' = 0$$

ומצד שני:

$$\langle \beta(t), \beta(t) \rangle' = \langle \beta'(t), \beta(t) \rangle + \langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = 2\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle$$

ונקבל: $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ לכל $t \in [a,b]$, כלומר $\beta \perp \beta'$.

7. נשתמש בנוסחת בייטמן.

(א) הפונקציה היא:

$$F\left(x,y\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x=\frac{2x}{a^2},F_y=\frac{2y}{b^2}$$

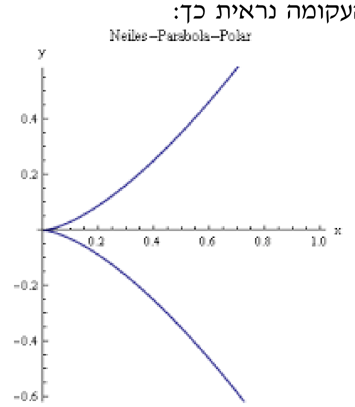
$$F_{xx}=\frac{2}{a^2},F_{xy}=0,F_{yy}=\frac{2}{b^2}$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{2}{b^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4x^2}{a^4}}\right)^3}=$$

$$=\frac{\frac{8}{a^2b^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)}{8\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^4}}\right)^3}=\frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^4}}\right)^3}$$

(ב) העקומה נראית כך:



הפונקציה היא:

$$F\left(x,y\right)=x^3-y^2=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$F_x=3x^2,F_y=-2y$$

$$F_{xx}=6x, F_{xy}=0, F_{yy}=-2$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{\left|24xy^2-18x^4\right|}{\left(\sqrt{9x^4+4y^2}\right)^3}$$

שימו לב שאפשר למצוא פרמטריזציה של העקומות ולחשב את העקמומיות לפי הפרמטריזציה.

6 התבנית היסודית הראשונה

6.1 מבוא

אינטואיטיבית, משטח הוא צורה דו־מימדית (ללא "נפח") במרחב, שאין לה "פינות", נקודות לא חלקות.

הגדרה 6.1 מפה רגולרית היא מפה חלקה $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שדרגת היעקוביאן שלה מקסימלית בכל נקודה (כלומר, שווה ל-2).

משטח הוא תת קבוצה $M \subset \mathbb{R}^3$, כך שלכל $x \in M$ קיימת מפה $\varphi_x : U_x \to M$ ש$-x$ נמצא בטווח שלה .

אוסף מפות כאלו $\{\varphi_x\}$ נקרא אטלס.

הצגה כזו נקראת פרמטריזציה של המשטח.

אפשר להגדיר גם משטח בצורה סתומה: $F(x,y,z) = 0$.

<u>לדוגמה:</u>

ספירת היחידה מוגדרת, למשל, על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$X(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

כאשר $(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$. אלו הקואורדינטות הכדוריות.

מאידך גיסא, אפשר להציגה בצורה סתומה:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

גליל שמרכזו ציר ה$-z$ ורדיוסו 1 אפשר להציג בעזרת הפרמטריזציה הבאה:

$$X(\theta,\phi) = (\cos\theta, \sin\theta, \phi)$$

כאשר $(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$.

כמו כן, אפשר להציגו בצורה סתומה, כך:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

6.2 המישור המשיק והגדרת התבנית היסודית הראשונה

נסמן ב־$T_p(M)$ את המישור המשיק למשטח M בנקודה p.

המישור המשיק הוא אוסף כל הוקטורים המשיקים לעקומות העוברות דרך p ונמצאות כולן על M.

אפשר לכתוב:

$$T_p(M) = \{\beta'(0) \,|\beta : [-a,a] \to M, \beta(0) = p\}$$

$T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^3$, אך מכיוון שזהו מישור ברור ש: $T_p(M) \cong \mathbb{R}^2$.

אם המשטח מוגדר על ידי מפה φ בסביבת הנקודה p והמפה רגולרית, אז:

$$T_p(M) = span\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$$

אם כן, לכל וקטור $w \in T_p(M)$ יש הצגה בקואורדינטות לפי הבסיס $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$:

$$w = w^1\varphi_u(p) + w^2\varphi_v(p)$$

ואם כן, נוכל להגדיר איזומורפיזם $\Phi : \mathbb{R}^2 \to T_p(M)$ על ידי:

$$\Phi((w^1, w^2)) = w^1\varphi_u(p) + w^2\varphi_v(p) = (\varphi_u(p), \varphi_v(p)) \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = J_\varphi(p) \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

זו היעקוביאן.

מכיוון שהיעקוביאן מוגדרת כפונקציה $J_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ והתחום והטווח אצלנו מעט שונים, להעתקה זו אנו קוראים הדיפרנציאל, ומסמנים אותה ב־$d_q\varphi$, כאשר q היא מקור של p.

שימו לב שזהו אכן איזומורפיזם (זכרו שכל וקטור ניתן להצגה **יחידה** כצירוף ליניארי של איברי הבסיס).

הגדרה 6.2 התבנית היסודית הראשונה:

נגדיר תבנית בילינארית $I : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$I(u_1, u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle$$

אם נסתכל על הוקטורים u_1, u_2 כצירופים ליניאריים של φ_u, φ_v:

$$u_1 = a^1\varphi_u + a^2\varphi_v$$
$$u_2 = b^1\varphi_u + b^2\varphi_v$$

נקבל (מליניאריות המכפלה הפנימית):

$$I\left(u_1, u_2\right) = \left\langle u_1, u_2\right\rangle = a^1b^1g_{11} + a^1b^2g_{12} + a^2b^1g_{21} + a^2b^2g_{22}$$

כאשר: $g_{11} = \left\langle \varphi_u, \varphi_u\right\rangle, g_{12} = g_{21} = \left\langle \varphi_u, \varphi_v\right\rangle, g_{22} = \left\langle \varphi_v, \varphi_v\right\rangle$.
אם כן, אפשר לומר שהתבנית I מושרית מהמטריצה:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

כלומר: $I\left(a, b\right) = b^t\left(g_{ij}\right)a$, כאשר $b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$.

בליניארית 2 קראנו למטריצה הזו מטריצת גראם.
שימו לב! שני האינדקסים נמצאים למטה, מכיוון שזו תבנית ביליניארית.
$\left(g_{ij}\right)$ נקראת ה**מטריקה** (הרימנית), g_{ij} נקראים **מקדמי המטריקה**.
מה אפשר לעשות עם התבנית היסודית הראשונה? לא מעט דברים, כפי שנראה בהמשך.

הערה 6.3 לעיתים מסמנים את המטריקה g_{ij} באופן הבא (כאשר המשתנים הם x, y):

$$g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx + g_{22}dy^2$$

מכיוון ש: $g_{12} = g_{21}$, אפשר לכתוב:

$$g_{11}dx^2 + 2g_{21}dydx + g_{22}dy^2$$

6.3 שימושים בסיסיים לתבנית היסודית הראשונה

6.3.1 חישוב אורך עקומה על משטח

תהי עקומה מישורית חלקה $\alpha : [a, b] \to U$, ויהי M משטח המוגדר על ידי $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$.
אפשר להגדיר $\beta : [a, b] \to M$ על ידי:

$$\beta = \varphi \circ \alpha$$

זו עקומה מרחבית שנמצאת על M.
אנו יודעים שהאורך שלה נתון על ידי הנוסחה:

$$L\left(\beta\right)=\int\limits_{a}^{b}\left\Vert \beta'\left(t\right)\right\Vert dt$$

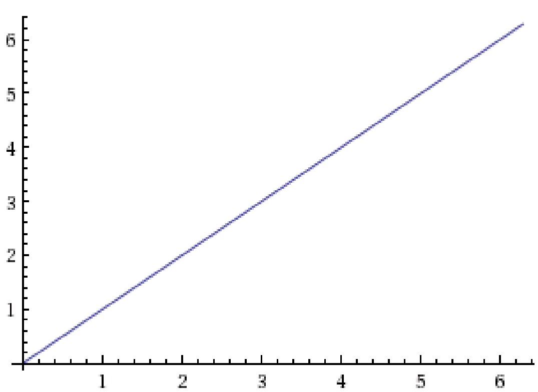
מתקיים:

$$\left\Vert \beta'\left(t\right)\right\Vert =\sqrt{\left(\alpha'\left(t\right)\right)^{t}\left(g_{ij}\right)\left(\alpha'\left(t\right)\right)}$$

ולכן אפשר לחשב את אורכה של β על ידי הנוסחה:

$$L\left(\beta\right)=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{\left(\alpha'\left(t\right)\right)^{t}\left(g_{ij}\right)\left(\alpha'\left(t\right)\right)}dt$$

<u>תרגיל:</u>
נסמן: $\Omega=\left\{ \left(u,v\right)\in\mathbb{R}^{2}|u,v\in\left[0,2\pi\right]\right\}$.
נגדיר עקומה $\alpha\left(t\right)=\left(t,t\right)$ כאשר $t\in\left[0,2\pi\right]$.
א. מהו אורכה של α?
<u>פתרון:</u>
העקומה שלנו היא:



כאשר התחום שלנו הוא עד ל-2π.
לפי פיתגורס, אורך העקומה הוא: $\sqrt{2}\cdot2\pi=\sqrt{\left(2\pi\right)^{2}+\left(2\pi\right)^{2}}$.

למתקדמים, אפשר גם לחשב בעזרת הנוסחה:

$$L(\alpha)=\int\limits_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\|(1,1)\|\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

ב. המשטח S נתון על ידי: $X:\Omega\to\mathbb{R}^3$, כאשר:

$$X(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$$

מצאו את אורכה של העקומה $\beta=X\circ\alpha$.

<u>פתרון:</u>

קודם כל, מהו המשטח שלנו? המשטח שלנו הוא **הליקואיד.**

v יוצר גם את ההתקדמות למעלה/למטה ביחס לציר z וגם את הזווית, ולכן זהו סליל, קפיץ שמתקדם במעלה ציר ה$-z$.

u משפיע על עובי הסליל, ולכן המשטח שלנו הוא מין סליל עבה, משהו כזה:

אפשר לחשב את אורכה של β בדרך הסטנדרטית; נחשב אותו בעזרת המטריקה.

אם כן, וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u=(\cos v,\sin v,0)\,,X_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=\langle X_u,X_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v+0^2=1$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle X_u,X_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v=0$$
$$g_{22}=\langle X_v,X_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=u^2+1$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

כעת, $\alpha'(t) = (1,1)$ ולכן:

$$\sqrt{(\alpha'(t))^t (g_{ij}) (\alpha'(t))} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{t^2+2}$$

ולכן:

$$L(\beta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+2}dt$$

זהו אינטגרל טריוויאלי, והוא שווה בערך ל-22.43.

ג. נחליף את המטריקה ל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2e^{2u} & 0 \\ 0 & 2e^{2v} \end{pmatrix}$$

מהו האורך של β עכשיו?

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה. הפעם:

$$\sqrt{(\alpha'(t))^t (g_{ij}) (\alpha'(t))} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2e^{2t}+2e^{2t}} = 2e^t$$

ולכן:

$$L(\beta) = \int_0^{2\pi} 2e^t dt = 2 \cdot \left(e^{2\pi}-1\right)$$

<u>תרגיל:</u>

תהי $X : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ המפה המוגדרת על ידי:

$$X(\theta,\phi) = (\cos\theta, \sin u, \phi)$$

זהו גליל אינסופי עם רדיוס 1 שמרכזו על ציר ה$-z$.

נסמן: $U = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. תהי $\alpha : [a, b] \to U$ עקומה. נגדיר עקומה נוספת על הגליל שלנו על ידי:

$$\beta(t) = X(\alpha(t))$$

הוכיחו ש: $L(\beta) = L(\alpha)$.

<u>פתרון:</u>

האורך של α נתון על ידי:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

נחשב את מקדמי המטריקה. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), X_v = (0, 0, 1)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_\theta, X_\phi \rangle = 0 \\ g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = 1 \end{gathered}$$

ואם כן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן האורך של ρ הוא:

$$L(\beta) = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^t (g_{ij}) (\alpha'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{(\alpha')^t (\alpha')} dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = L(\alpha)$$

והאורכים אכן שווים.

כדי להמחיש זאת, קחו דף וקשקשו עליו עקומה כלשהי.

כעת, גלגלו את הדף לגליל (חלקכם בדוואי מנוסים בכך); זו מה שעושה המפה X.

מה קרה לקשקוש שלנו? הפיכת הדף המישורי לגליל לא כיווצה או מתחה אותו, ולכן אין שום סיבה שאורך הקשקוש ישתנה.

אם כן, המפה X שומרת על אורך של עקומות.

6.3.2 חישוב שטחים על משטחים

יהי M משטח המוגדר על ידי $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$.

תהי $D \subseteq U$. אפשר לחשב את השטח של $\varphi(D)$ בעזרת הנוסחה:

$$\iint\limits_{\varphi(D)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{\det(g_{ij})} du dv$$

חשבו מהי החלפת המשתנים המתאימה.

<u>תרגיל:</u>

נתון המשטח $X : U \to M$, כאשר $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, ונתונה המטריקה:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את אורך העקומות $\beta_i = X \circ \alpha_i$ במקרים הבאים:

1. $\alpha_1(t) = (A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

<u>פתרון:</u>

המטריקה כבר נתונה לנו.

וקטור הנגזרות של העקומה הוא: $\alpha_1'(t) = (-A\sin t, A\cos t)$ ולכן:

$$L(\beta_1) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\begin{pmatrix} -A\sin t & A\cos t \end{pmatrix} \frac{1}{(A\sin t)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A\sin t \\ A\cos t \end{pmatrix}} dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{(A\sin t)^2} \cdot \left(A^2\sin^2 t + A^2\cos^2 t\right)} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt$$

את האינטגרל הזה אפשר לחשב בעזרת ההצבה האוניברסלית $x = \tan\frac{t}{2}$ ואפשר ללכת עם ולהרגיש בלי, כך:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin t} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}} dt = \left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{2\pi}{3}} = \ln 3$$

וזהו האורך של β_1.

2. $\alpha_2(t) = (A\cos t, A\sin t)$ כאשר $t \in [0, \pi]$.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה זהה לזו שבתת־סעיף 1, ורק הגבולות משתנים, ולכן:

$$L\left(\beta_2\right)=\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)_{t=0}^{t=\pi}=\lim_{t\longrightarrow\pi}\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)-\lim_{t\longrightarrow 0}\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)=\infty$$

מכיוון שמתקיים:

$$\lim_{t\longrightarrow\pi}\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)=\infty,\lim_{t\longrightarrow 0}\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)=-\infty$$

כלומר, חצי הקשת העליון של המעגל הופך לעקומה באורך אינסופי, בעוד ששישית הקשת העליונה של המעגל הופכת לעקומה באורך $\ln 3$.

3. $\alpha_3\left(t\right)=\left(1,t\right)$ כאשר $t\in[0,1]$.

פתרון:

וקטור הנגזרות של העקומה הוא $\alpha_3'\left(t\right)=\left(0,1\right)$ ולכן:

$$L\left(\beta_3\right)=\int\limits_0^1\sqrt{\left(\begin{array}{cc}0&1\end{array}\right)\frac{1}{\left(t\right)^2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)}dt=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1}{t^2}}dt=\left(\ln t\right)_{t=0}^{t=1}=$$

$$=\ln 1-\lim_{t\longrightarrow 0}t=\infty$$

אם כן, גם קטע (מקביל לציר ה$-y$) הופך לעקומה באורך אינסופי.

ב. חשבו את השטח של $X\circ\Omega$ כאשר:

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),x^2+y^2>1\right\}$$

פתרון:

נשתמש בנוסחה: $\iint_{\varphi(\Omega)}dS=\iint_{\Omega}\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}dxdy$.

מתקיים:

$$\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}=\sqrt{\left|\begin{array}{cc}\frac{1}{y^2}&0\\0&\frac{1}{y^2}\end{array}\right|}=\frac{1}{y^2}$$

מהו התחום Ω שלנו? $\Omega=\left\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\sqrt{1-x^2}<y<\infty\right\}$ ולכן:

$$S\left(X\circ\Omega\right)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dydx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y}\right)_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty}dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$= (\arcsin x)_{x=-\frac{1}{2}}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

כלומר התחום האינסופי הזה הופך לתחום עם שטח סופי. מה פה קורה פה?

הידעת?

המשטח M הוא **המישור ההיפרבולי**, מישור המקיים את כל האקסיומות האוקלידיות חוץ מאקסיומת המקבילים.

הוא נקרא גם **חצי המישור של פואנקרה** או **המישור של לובצ'בסקי**.

לפי **משפט הילברט**, אין שיכון של חצי המישור של פואנקרה בתוך $\mathbb{R}^3$.

במילים אחרות, אין פרמטריזציה של חצי המישור שזו המטריקה שלה.

(איך מגדירים פרמטריזציה בלי מטריקה...? לא נעסוק בכך כאן).

6.3.3 שוני בין פרמטריזציות

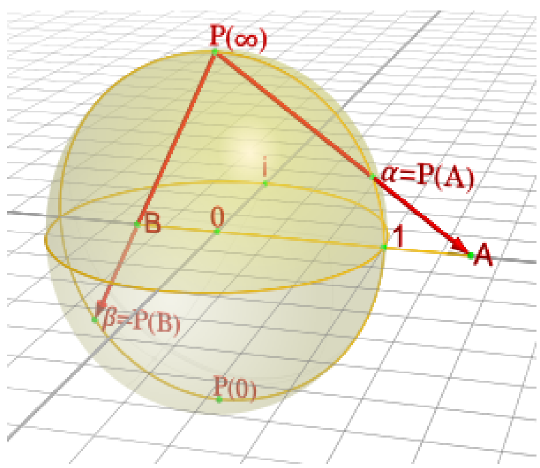
תרגיל:

נתבונן במשטח S^2, ספירת היחידה ב$-\mathbb{R}^3$, עם שלוש פרמטריזציות:

א. $X(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$.

ב. $F(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right)$.

F היא הפונקציה ההופכית להטלה הסטריאוגרפית:



איך פועלת ההטלה הסטריאוגרפית?

מניחים את הספירה על המישור.

לכל נקודה על הספירה, נמתח קו בינה לבין הקוטב הצפוני.

את הקו נמשיך עד שהוא חותך את המישור.

ההטלה הסטריאוגרפית שולחת את הנקודה על הספירה לנקודת החיתוך של הקו עם המישור.

ג. $P(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}(u,v,1)$ ההעתקה ההפוכה להטלה המרכזית; ההטלה המרכזית היא ממרכז הספירה על המישור $z=1$.

מצאו את המטריקה הרימנית בשלושת המקרים.

שימו לב שאפשר להגדיר את ההטלות האלו לספירה עם רדיוס כללי R.

פתרון:

א. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\cos\theta\cos\phi, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi), X_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\phi\cos\theta, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta\rangle & \langle f_\theta, f_\phi\rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta\rangle & \langle f_\phi, f_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. באופן דומה מחשבים ומקבלים:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. שוב, נגזור ונכפיל ונקבל:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\begin{pmatrix} v^2+1 & -uv \\ -uv & u^2+1 \end{pmatrix}$$

אם כן, פרמטריזציות שונות משרות מטריקות שונות.

שימו לב שבפרמטריזציה השנייה קיבלנו מטריצה סקלרית, בפרמטריזציה הראשונה מטריצה אלכסונית שאינה סקלרית ובפרמטריזציה השלישית מטריצה שכלל אינה אלכסונית.

משפט 6.4 שני משטחים הם איזומורפיים (איזומטריים) אם ורק אם קיימות פרמטריזציות שלהם שבהן (g_{ij}) זהה.

כלומר, התבנית היסודית הראשונה היא תכונה פנימית של המשטח.

תרגיל:

נתונה פרמטריזציה של משטח $X: U \to M$. תהי $f: A \to U$ פונקציה:

$$f(x,y) = (u,v)$$

כאשר $A, U \subseteq \mathbb{R}^2$.

נגדיר פרמטריזציה חדשה: $\tilde{X} = X \circ f$. הביעו את $(\tilde{g}_{ij})$, המטריקה של $\tilde{X}$, באמצעות (g_{ij}), המטריקה של X.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש: $(\tilde{g}_{ij}) = J^t_{\tilde{X}} \cdot J_{\tilde{X}}$. כעת, לפי כלל השרשרת:

$$J_{\tilde{X}} = J_X(f) \cdot J_f$$

ולכן:

$$(\tilde{g}_{ij}) = J^t_{\tilde{X}} \cdot J_{\tilde{X}} = (J_X(f) \cdot J_f)^t \cdot J_X(f) \cdot J_f = J^t_f \cdot J_X(f)^t \cdot J_X(f) \cdot J_f = J^t_f\,(g_{ij})\,J_f$$

ובסה"כ:

$$(\tilde{g}_{ij})\,(x,y) = J^t_f\,(x,y)\,(g_{ij})\,(f\,(x,y))\,J_f\,(x,y)$$

6.4 משטחי סיבוב

תהי $\beta\,(\phi) = (r\,(\phi)\,, 0, z\,(\phi))$ עקומה (רגולרית) במישור xz.

נסובב את β בזווית θ סביב ציר ה$-z$ ונקבל משטח עם פרמטריזציה התלויה בזוג (θ, ϕ).

המשטח המתקבל הוא $X\,(\theta, \phi) = R_\theta \cdot \beta\,(\phi)$ כאשר R_θ היא מטריצת הסיבוב המתאימה:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$X\,(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\,(\phi) \\ 0 \\ z\,(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,(\phi)\cos\theta \\ r\,(\phi)\sin\theta \\ z\,(\phi) \end{pmatrix}$$

במצב כזה, r מסמלת את הרדיוס סביב הציר ו$-z$ מסמלת בפשטות את שיעור ה$-z$.

<u>לדוגמה:</u>

1. אם $\beta\,(\phi)$ היא קו ישר המקביל לציר ה$-z$ נקבל גליל:

$$\beta\,(\phi) = (a, 0, \phi) \Longrightarrow X\,(\theta, \phi) = (a\cos\theta, a\sin\theta, \phi)$$

2. אם $\beta(\phi)$ היא קו ישר שאינו מקביל לציר z, נקבל חרוט; למשל:

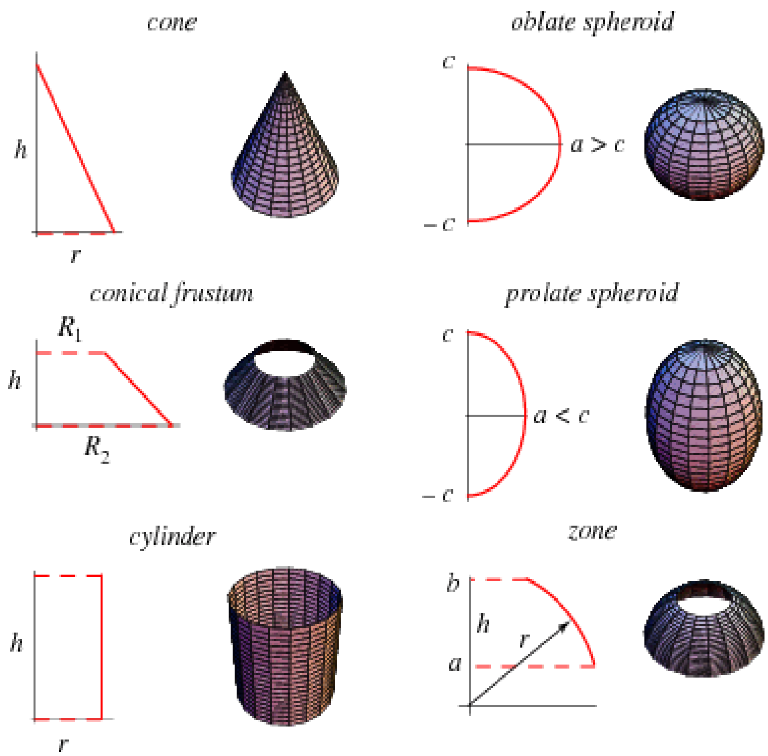
$$\beta(\phi) = (\phi, 0, \phi) \Longrightarrow X(\theta, \phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, \phi)$$

3. אם $\beta(\phi)$ מעגל (עם מרכז a שבו $y=0$ ורדיוס b, $0<a<b$), נקבל טורוס:

$$\beta(\phi) = (a + b\cos\phi, 0, a + b\sin\phi) \Longrightarrow X(\theta, \phi) = ((a + b\cos\phi)\cos\theta, (a + b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi)$$

טורוס מזכיר בצורתו גלגל ים (או שמא גלגל ים הוא המזכיר בצורתו טורוס?)

משטחי סיבוב שונים והעקומות היוצרות אותם:



<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח הסיבוב של העקומה $\beta(s) = (r(s), 0, z(s))$, הנתונה בפרמטריזציה טבעית.

מצאו את התבנית היסודית הראשונה של M.

<u>פתרון:</u>

הפרמטריזציה של M היא:

$$X(\theta, s) = \begin{pmatrix} r(s)\cos\theta \\ r(s)\sin\theta \\ z(s) \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = (-r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, 0), X_s = (r'(s)\cos\theta, r'(s)\sin\theta, z'(s))$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$\begin{gathered} g_{22} = \langle X_s, X_s\rangle = (r'(s))^2 + (z'(s))^2 = \|\beta'(s)\| = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_s, X_\theta\rangle = 0 \\ g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = r^2(s) \end{gathered}$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגילים נוספים

1. חשבו את התבניות היסודיות של המשטחים הבאים:

   (א) משטח הנתון בצורה הסתומה $z = f(x, y)$.

   (ב) $X(\theta, \phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, k\phi)$.

   (ג) $X(u, v) = (u\cos v, u\sin v, kv)$.

   (ד) $X(\theta, \phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$.

   (ה) $X(\theta, \phi) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$.

   (ו) $X(\theta, \phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \sinh\phi)$.

2. מצאו נוסחה מפורשת להטלה הסטריאוגרפית.

3. תהי $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ עקומה פשוטה ורגולרית. נגדיר את **הגליל מעל** α באופן הבא:

$$\Phi(a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(s, u) = \left(\alpha^1(s), \alpha^2(s), u\right)$$

כאשר $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2\right)$. הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל (פרמטריזציה של α), עבורן $(g_{ij}) = I$.

4. ספירת היחידה מוגדרת על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$X(\theta, \phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

כאשר $U = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \ni (\theta, \phi)$. נתבונן בעקומה $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to U$ המוגדרת על ידי: $\alpha(t) = (\pi, 2t)$.

   (א) מצאו את אורך העקומה α.

   (ב) מצאו את אורך העקומה $X \circ \alpha$.

   (ג) הספירה לסמי התחצפה, ולא התחפפה, וסומו ישב עליה עד שיצאה טורוס, המוגדר על ידי הפרמטריזציה:

$$X(\theta, \phi) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$$

   חשבו את השטחים $X(D), X(E)$, כאשר $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$, $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]$.

פתרונות

1. נגזור ונכפיל את וקטורי הנגזרות זה בזה.

(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1, 0, f_u), X_v = (0, 1, f_v)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + f_u^2 \\ g_{12} = g_{21} &= \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v \\ g_{22} &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + f_v^2 \end{aligned}$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}$$

(ב) המשטח שלנו הוא חרוט.
נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_\phi = (\cos\theta, \sin\theta, k), X_\theta = (-\phi\sin\theta, \phi\cos\theta, 0)$$

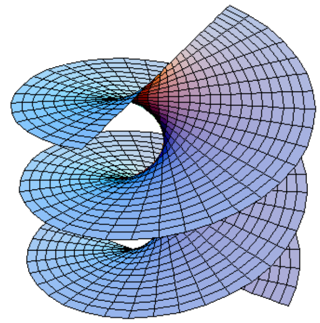
מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta + k^2 = 1 + k^2 \\ g_{12} = g_{21} &= \langle X_\theta, X_\phi \rangle = -\phi\cos\theta\sin\theta + \phi\cos\theta\sin\theta + 0^2 = 0 \\ g_{22} &= \langle X_\phi, X_\phi \rangle = \phi^2\sin^2\theta + \phi^2\cos^2\theta + 0^2 = \phi^2 \end{aligned}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + k^2 & 0 \\ 0 & \phi^2 \end{pmatrix}$$

(ג) המשטח שלנו הוא הליקואיד:



נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0)\,, X_v = (-u \sin v, u \cos v, k)$$

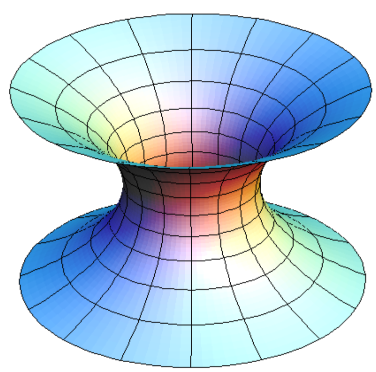
מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \cos v \sin v + 0 = 0 \\ g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + k^2 = u^2 + k^2 \end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + k^2 \end{pmatrix}$$

(ד) המשטח שלנו הוא קטנואיד:



לפני שנתחיל בגזירות ובחגיגות, נזכור ש:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$(\cosh t)' = \sinh t, (\sinh t)' = \cosh t, 1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, 1)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + 1 = \sinh^2\phi + 1 = \cosh^2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix}$$

(ה) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\sin\theta, -2\sin\phi), X_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta, 2\sin\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = 4\cos^2\phi\cos^2\theta + 4\cos^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi = 4$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = 4\sin^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\cos^2\theta = 4\sin^2\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(ו) המשטח שלנו הוא היפרבולואיד.

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, \cosh\phi)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi = \cosh 2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta \rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh 2\phi \end{pmatrix}$$

2. תהי $p \in S^2 \setminus \{N\}$ נקודה על הספירה שאינה הקוטב הצפוני.
הישר Np מוגדר על ידי:

$$Np = \{(1-t)\,N + pt : t \geq 0\}$$

אם נסמן $p = (x,y,z)$ ונזכור ש: $N = (0,0,1)$, נקבל:

$$Np = \{(tx, ty, 1-t+tz)\,|t \geq 0\}$$

נקודת החיתוך עם המישור xy מקיימת: $1-t+tz = 0$, כלומר: $t = \frac{1}{1-z}$.
לכן, הנקודה היא: $\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$, ולכן ההטלה הסטריאוגרפית מוגדרת כך:

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$$

3. נחשב את המטריקה (g_{ij}). וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (0,0,1)\,, X_s = \left(\left(\alpha^1(s)\right)', \left(\alpha^2(s)\right)', 0\right)$$

ולכן:

$$g_{22} = X_u \cdot X_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_s = 0$$

$$g_{11} = X_s \cdot X_s = \|\alpha'(s)\|^2$$

ולכן אם נבחר פרמטריזציה טבעית (שבה $\|\alpha'(s)\| = 1$) נקבל שאכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4. נשתמש במטריקה (g_{ij}).

(א) וקטור הנגזרות הוא: $\alpha'(t) = (0,2)$, ולכן האורך הוא:

$$L(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(0,2)\|\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\cos\theta\cos\phi, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)\,, X_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\phi\cos\theta, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle X_\theta, X_\theta\rangle & \langle X_\theta, X_\phi\rangle \\ \langle X_\phi, X_\theta\rangle & \langle X_\phi, X_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן, האורך הוא:

$$L(X\circ\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} d\phi = \pi$$

כלומר, האורך לא השתנה.

(ג) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,, X_\theta = (-(2+\cos\phi)\sin\theta, (2+\cos\phi)\cos\theta, 0)$$

ולכן:

$$g_{22} = X_\phi \cdot X_\phi = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = X_\phi \cdot X_\theta = 0$$

$$g_{11} = X_\theta \cdot X_\theta = (2+\cos\phi)^2$$

כלומר $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (2+\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

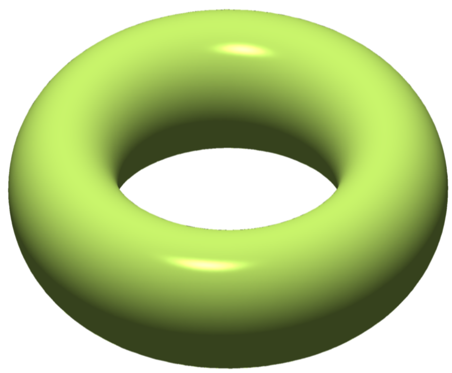
כעת, נחשב את השטח באמצעות הנוסחה:

$$\iint\limits_{r(D)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{\det(g_{ij})} dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos\phi)\, d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\phi + \sin\phi)\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi + 1)\, d\theta = \frac{\pi}{2} (\pi + 1)$$

$$\iint_{r(E)} dS = \iint_E \sqrt{\det (g_{ij})} dS = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos \phi)\, d\phi d\theta = \pi (\pi + 1)$$

הטורוס נראה כך:



7 עקומות גיאודזיות ומקדמי כריסטופל

7.1 מבוא

בפרקים הקודמים (של חתולונובלה) ראינו איך לחשב אורך של עקומה על המשטח.

השאלה המתבקשת היא זו ־ בהינתן שתי נקודות, מהי הדרך הקצרה ביותר ביניהן על המשטח?

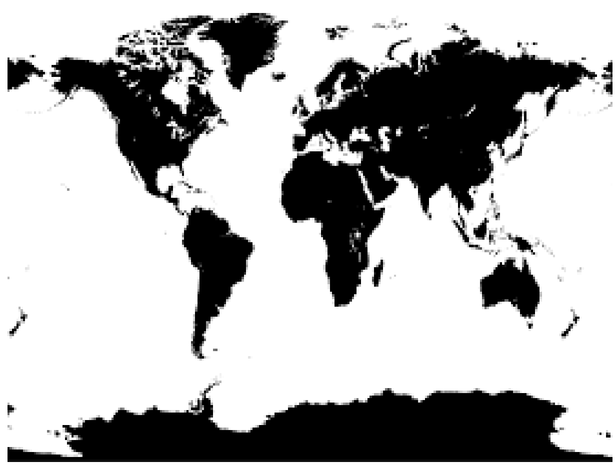
למשל, נניח שאנו רוצים לטוס מניו־יורק למוסקבה. בהנחה שאפשר לטוס לכל כיוון בכל דרך (ללא בעיות כמו אזורים אסורים לטיסה או מזג אוויר), מהי הדרך הקצרה ביותר לטוס?

אנו יודעים שב־$\mathbb{R}^n$ הדרך הקצרה ביותר היא הקו הישר ביניהן.

אלא מאי? הקו הישר לא נמצא על הספירה (אם מתבוננים עליה כעל תת־קבוצה של המרחב $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$), אלא "עובר דרכה".

בדוגמה שלנו, הקו הישר ב־$\mathbb{R}^3$ בין ניו־יורק למוסקבה עובר דרך כדור הארץ, ובוודאי שאי־אפשר לטוס כך.

באופן נאיבי, היינו פורשים את כדור הארץ למישור, כמו במפות הסטנדרטיות:



מבחינה אלגברית, הספירה מוגדרת על ידי פרמטריזציה: $X : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to S^2$, ואנו מסתכלים כעת על $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

במישור, היינו מותחים קו ישר בין ניו־יורק למוסקבה ולאחר מכן היינו מכדררים את המישור חזרה לכדור הארץ, וטסים לאורך הקו.

דא עקא, שזו אינה הדרך הקצרה ביותר; היא ארוכה ביותר מ־1000 קילומטרים מהדרך הקצרה!

קל היה לראות שדרך זו אינה נכונה, מכיוון שאנטארקטיקה הפכה למפלצת בתחתית המפה ־ הרבה יותר מגודלה האמיתי ־ ומכאן להסיק שהמפה מתעוותת כשמשטחים את הכדור.

עם זאת, בתהליך שגוי זה שמנו לב לדבר חשוב ־ במקום לבדוק ישירות עקומות על המשטח, אפשר לבדוק עקומות על התחום המתאים במישור.

זאת, מכיוון שכל עקומה $\beta : [a,b] \to M$ על המשטח $X : U \to M$ אפשר להציג כ: $\beta = X \circ \alpha$ כאשר $\alpha : [a,b] \to U$ עקומה בתחום המתאים במישור.

במילים אחרות, השאלה שלנו שקולה לשאלה הבאה: מהי העקומה המישורית α שנותנת את העקומה β, שהיא המסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות על המשטח?

כדי לסבר את האוזן, נאמר שהעקומות הגיאודזיות על הספירה הן מעגלים גדולים (מעגלים על הספירה שרדיוסם שווה לרדיוס הספירה. הידעת? רדיוס נקרא בעברית **מחוג**).

הגדרה 7.1 העקומה המשטחית β הנ"ל נקראת **עקומה גיאודזית**.

העקומה המישורית α הנ"ל נקראת **קו גיאודזי** או בפשטות **גיאודז**.

העקומה הגיאודזית נתונה בפרמטריזציה טבעית (אחרת המונח "קצרה ביותר" כלל לא מוגדר; ראינו שאותן עקומות מבחינה גיאומטרית נותנות אורך שונה בפרמטריזציות שונות).

הערה 7.2 אפשר גם לנסח את השאלה שלנו כבעיית קיצון. אנו רוצים למצוא את העקומה המישורית שנותנת לנו מינימום מבחינת מרחק על המשטח.

כלומר, אם נסמן את קבוצת העקומות המישוריות המתאימות ב־A ואת קבוצת המרחקים ב־B (אפשר פשוט להתייחס אל B כאל $\mathbb{R}^+$), אינטואיטיבית אנו מחפשים מינימום

לפונקציה:

$$F : A \to B$$

כאשר $F\left(\alpha\right) = L\left(X \circ \alpha\right)$; F מתאימה לכל עקומה מישורית את אורכה של העקומה המשטחית המתאימה.

אנו רוצים למצוא מינימום לפונקציה של פונקציות (מה שעשינו בקורסים קודמים ובתיכון היה למצוא מינימום "מספרי" לפונקציה "מספרית").

תחום מתמטי זה נקרא **חשבון הוריאציות**.

אפשר לגשת לבעיה שלנו דרך חשבון הוראיציות; לא נעסוק בכך כרגע.

אז איך מוצאים עקומות גיאודזיות? כל זאת ועוד בפרק הבא של גיאומטריה.

7.2 מקדמי כריסטופל

יהי M משטח, הנתון על ידי הפרמטריזציה $X\left(u, v\right)$.

אנו יודעים שבכל נקודה p הוקטורים X_u, X_v הם בת"ל, ובפרט בסיס למישור המשיק $T_p\left(M\right)$.

מתכונות המכפלה הוקטורית, נורמל היחידה למישור המשיק המוגדר על ידי:

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

מכיוון שהוא מאונך לוקטורים X_u, X_v, נקבל שהוקטורים $\{X_u, X_v, \vec{n}\}$ בת"ל.

לכן, הם מהווים בסיס ל$-\mathbb{R}^3$.

לפיכך, כל וקטור ב$-\mathbb{R}^3$ ניתן להצגה באופן יחיד כצירוף ליניארי של וקטורים אלה.

בפרט, וקטורי הנגזרות השניות ניתנים להצגה כצירופים ליניאריים שלהם. לשם הנוחות, נסמן:

$$X_u = X_1, X_v = X_2$$

$$X_{uu} = X_{11}, X_{uv} = X_{12}, X_{vu} = X_{21}, X_{vv} = X_{22}$$

ונכתוב:

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^{1} X_1 + \Gamma_{ij}^{2} X_2 + L_{ij}\vec{n}$$

לכל $1 \leq i, j \leq 2$.

הגדרה 7.3 Γ_{ij}^{k} הם **מקדמי כריסטופל** $(Christoffel)$ של המשטח.

הם נקראים גם **סמלי גאמא** (וגם סמלי כריסטופל, סימני כריסטופל ועל זו הדרך).

את סמלי כריסטופל אפשר לחשב באופן הבא:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\langle x_{ij},x_{l}\rangle\, g^{lk}$$

משפט 7.4 לאחר עבודה, אפשר לקבל את הנוסחה הבאה למקדמי כריסטופל:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)$$

כאשר:

1. זהו סימון איינשטיין (תודו שהתגעגעתם); הסכום רץ על m, $m=1,2$.
2. g^{ij} הם איברי $\left(g_{ij}\right)^{-1}$. כלומר, $\left(g^{ij}\right)=\left(g_{ij}\right)^{-1}$. למשל, g^{11} הוא האיבר הימני למעלה ב-$\left(g_{ij}\right)^{-1}$ (כאשר $\left(g_{ij}\right)$ היא המטריקה).
3. $g_{ab,c}$ הוא הנגזרת של מקדם המטריקה g_{ab} לפי המשתנה ה-c. למשל, $g_{12,2}$ הוא הנגזרת של g_{12} לפי המשתנה השני.
4. $1\le i,j,k\le 2$, מה שנותן לנו 8 מקדמי כריסטופל.
5. נשים לב שמתקיים: $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$.

הנוסחה נראית ארוכה ומפותלת, אך המטריצה $\left(g_{ij}\right)$ נוחה בדרך כלל והרבה מהמקדמים מתאפסים.

<u>תרגיל:</u>

נחשב את מקדמי כריסטופל של המישור ההיפרבולי:

$$H=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}:y>0\right)\right\}$$

עם המטריקה:

$$\left(g_{ij}\right)=\frac{1}{y^{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

לשם הנוחות, נגזור את כל המטריצה במכה, ונסמן זאת כך:

$$\left(g_{ij}\right)_{,1}=\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial x}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\left(g_{ij}\right)_{,2}=\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial y}=-\frac{2}{y^{3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$\left(g_{ij}\right)^{-1}=y^{2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)$$

ולכן:

$$g^{11}=y^{2},g^{12}=g^{21}=0,g^{22}=y^{2}$$

$$g_{11,1}=g_{12,1}=g_{21,1}=g_{22,1}=0$$

$$g_{11,2}=g_{22,2}=-\frac{2}{y^{3}},g_{12,2}=g_{21,2}=0$$

ואם כן:

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^{1}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0\\ \Gamma_{12}^{1}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(\ldots\right)=-\tfrac{1}{y}\\ \Gamma_{21}^{1}=-\tfrac{1}{y}\\ \Gamma_{22}^{1}=0\\ \Gamma_{11}^{2}=\tfrac{1}{y}\\ \Gamma_{12}^{2}=0\\ \Gamma_{21}^{2}=0\\ \Gamma_{22}^{2}=-\tfrac{1}{y}\end{gathered}$$

7.3 המשוואות הגיאודזיות

בעזרת מקדמי כריסטופל אפשר למצוא את הקווים הגיאודזיים.

יהי M משטח, הנתון על ידי הפרמטריזציה $X\left(u,v\right)$.

משפט 7.5 אם β עקומה גיאודזית, מתקיים: $\beta''=c\cdot\vec{n}$ (כאשר $\vec{n}$ הוא הנורמל שהגדרנו מקודם).

כלומר, הנגזרת השנייה של העקומה תלויה ליניארית בנורמל בלבד.

אנו יודעים ש: $\beta=X\circ\alpha$, כאשר $\alpha\left(t\right)=\left(\alpha^{1}\left(t\right),\alpha^{2}\left(t\right)\right)$ עקומה מישורית בתחום המתאים.

אם נגזור את β פעמיים, בעזרת כלל השרשרת ומקדמי כריסטופל נקבל:

$$\left(\beta^k\right)'' = (\alpha^k)'' + \Gamma^k_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' + \left(L_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)'\vec{n}\right)$$

בסימון איינשטיין.

לפי המשפט, פירוש הדבר שמתקיים:

$$\begin{cases} (\alpha^1)'' + \Gamma^1_{ij}(\alpha^i)'(\alpha^j)' = 0 \\ (\alpha^2)'' + \Gamma^2_{ij}(\alpha^i)'(\alpha^j)' = 0 \end{cases}$$

הגדרה 7.6 משוואות אלו נקראות **המשוואות הגיאודזיות**.

אם כן, כדי למצוא את הקווים הגיאודזיים יש לפתור את המד"ר האלו.

יתר על כן, אפשר להניח שהעקומה הגיאודזית נתונה בפרמטריזציה טבעית, כלומר:

$$\|\beta'\| = 1$$

.

מכיוון ש: $\|\beta'\| = \sqrt{\left(\alpha'\right)^t \cdot (g_{ij}) \cdot (\alpha')}$, נקבל מד"ר נוספת על α:

$$1 = \left(\alpha'\right)^t \cdot (g_{ij}) \cdot (\alpha')$$

ובסה"כ כשנחפש את הקווים הגיאודזיים תעמודנה לרשותנו 3 משוואות.

תרגילים נוספים

1. חשבו את מקדמי כריסטופל של מישור xy (הציגו אותו כמשטח עם פרמטריזציה מתאימה).

2. חשבו את מקדמי כריסטופל של משטח סיבוב:

$$X\left(\theta,s\right)=\left(r\left(s\right)\cos\theta,r\left(s\right)\sin\theta,z\left(s\right)\right)$$

3. חשבו את מקדמי כריסטופל של טורוס ושל ספירת היחידה.

4. מצאו את הקווים הגיאודזיים של הגליל $\left\{x^2+y^2=1\right\}$.

5. הוכיחו את הזהויות הבאות (הנתונות בסימון איינשטיין):

   (א) $\langle X_{ij},X_k\rangle=\Gamma_{ij}^{s}g_{sk}$.

   (ב) $g_{ij,k}=\langle X_{ik},X_j\rangle+\langle X_i,X_{jk}\rangle$.

6. יהיו M_1,M_2 שני משטחים עם מטריקות $\left(g_{ij}\right)_1,\left(g_{ij}\right)_2$ בהתאמה. נתון שמקדמי כריסטופל של המשטחים זהים. האם $\left(g_{ij}\right)_1=\left(g_{ij}\right)_2$?

7. נתון ההיפרבולואיד $(\cosh\phi\cos\theta,\cosh\phi\sin\theta,\sinh\phi)$.
   חשבו את התבנית היסודית הראשונה ואת מקדמי כריסטופל.
   הוכיחו שהמעגל $x^2+y^2=1$ במישור $z=0$ הוא קו גיאודזי על פני ההיפרבולואיד.
   הניחו שהעקומה הגיאודזית נתונה בפרמטריזציה טבעית.

8. מצאו את הקווים הגיאודזיים על המשטחים הבאים. אם זה לא נורא מאד, מצאו את העקומות הגיאודזיות.

   (א) ספירה: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

   (ב) גליל: $x^2+y^2=r^2$.

   (ג) חרוט עם הפרמטריזציה:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(r\phi\cos\theta,r\phi\sin\theta,\phi\right)$$

   (ד) משטח שהמטריקה שלו היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} v & 0\\ 0 & v\end{pmatrix}$$

9. נתבונן במישור כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה:

$$(g_{ij}) = e^{x+y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) חשבו את מקדמי כריסטופל.

(ב) האם הישר $y = x$ הוא עקומה גיאודזית?

(ג) האם הישר $y = 0$ הוא עקומה גיאודזית?

(ד) האם הישר $x = 1$ הוא עקומה גיאודזית?

פתרונות

1. נתבונן בפרמטריזציה הבאה של מישור xy:

$$X(u,v)=(u,v,0)$$

כאשר $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u=(1,0,0)\,,X_v=(0,1,0)$$

מכיוון שהוקטורים אורתונורמליים, נקבל:

$$g_{11}=X_u\cdot X_u=1,g_{12}=g_{21}=X_u\cdot X_v=0,g_{22}=X_v\cdot X_v=1$$

ולכן:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כעת, אם נגזור מי מאיברי (g_{ij}) נקבל 0, ולכן:

$$\Gamma_{ij}^k=0$$

לכל $1\le i,j,k\le 2$.

2. נזכור שהתבנית היסודית הראשונה של משטח סיבוב היא:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}r^2(s)&0\\0&1\end{pmatrix}$$

לכן:

$$(g_{ij})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r^2(s)}&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{\partial(g_{ij})}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\frac{\partial(g_{ij})}{\partial s}=\begin{pmatrix}2r(s)\,r'(s)&0\\0&0\end{pmatrix}$$

אם כן,

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1})+\frac{1}{2}g^{12}(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2})=0$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}g^{11}(g_{11,2}+g_{12,1}-g_{12,1})+\frac{1}{2}g^{12}(g_{21,2}+g_{22,1}-g_{12,2})=\frac{1}{2}\frac{2r(s)\,r'(s)}{r^2(s)}$$

כלומר $\Gamma_{12}^1=\frac{r'}{r}$. לכן גם $\Gamma_{21}^1=\frac{r'}{r}$. כמו כן, $\Gamma_{22}^1=0$.
באופן דומה מחשבים את Γ_{ij}^2:

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}g^{21}(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1})+\frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2})=r(s)\,r'(s)$$

$$\Gamma_{21}^2=\Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,2}+g_{12,1}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,2}+g_{22,1}-g_{12,2}\right)=0$$

$$\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{21,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

3. טורוס וספירת היחידה הם משטחי סיבוב, ולכן אפשר להשתמש בשאלה הקודמת כדי לחשב את מקדמי כריסטופל שלהם.
למשל, המטריקה של הטורוס:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(2+\cos\phi\right)\cos\theta,\left(2+\cos\phi\right)\sin\theta,\sin\theta\right)$$

למשל, היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\left(2+\cos\phi\right)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ושל ספירת היחידה:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\sin^2\phi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

מציבים בנוסחאות שמצאנו בשאלה הקודמת ומקבלים את המקדמים המתאימים.

4. פרמטריזציה של הגליל היא:

$$X(\theta,v)=\left(\cos\theta,\sin\theta,u\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta=(0,0,1),X_\phi=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$\begin{gathered}g_{11}=\langle X_\theta,X_\theta\rangle=1\\ g_{12}=g_{21}=\langle X_\theta,X_\phi\rangle=0\\ g_{22}=\langle X_\phi,X_\phi\rangle=\sin^2\phi+\cos^2\phi=1\end{gathered}$$

ואם כן:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

כמו בשאלה על המישור, נקבל שמקדמי כריסטופל כולם מתאפסים: $\Gamma_{ij}^k = 0$.
לכן, המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} (\alpha^1)'' + \Gamma_{ij}^1(\alpha^1)'(\alpha^2)' = 0 \Longrightarrow (\alpha^1)'' = 0 \\ (\alpha^2)'' + \Gamma_{ij}^2(\alpha^1)'(\alpha^2)' = 0 \Longrightarrow (\alpha^2)'' = 0 \end{cases}$$

כלומר, הנגזרות השניות מתאפסות.
נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases} \alpha^1(t) = at + b \\ \alpha^2(t) = ct + d \end{cases}$$

כלומר, $\alpha(t) = (b, d) + (a, c)t$, קו ישר.
אם כן, העקומות המישוריות שנותנות את העקומות הגיאודזיות הן בעצמן העקומות הגיאודזיות במישור.
אינטואיטיבית הדבר הגיוני, מכיוון שההעתקה X "מגלגלת" את המישור לגליל (ולא מותחת או מכווצת אותו), וכפי שראינו בעבר העקומות המישוריות שומרות על אורכן.

5. נשתמש בתכונות השונות של המחוברים.

(א) נזכור שמתקיים:

$$X_{ij} = \Gamma_{ij}^1 X_1 + \Gamma_{ij}^2 X_2 + b_{ij}\vec{n}$$

ולכן:

$$\langle X_{ij}, X_k\rangle = \left\langle \Gamma_{ij}^1 X_1 + \Gamma_{ij}^2 X_2 + b_{ij}\vec{n}, X_k\right\rangle = \Gamma_{ij}^1 \langle X_1, X_k\rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle X_2, X_k\rangle + b_{ij} \langle \vec{n}, X_k\rangle =$$

הנורמל $\vec{n}$ מאונך לוקטור הנגזרות X_k ולכן:

$$= \Gamma_{ij}^1 \langle X_1, X_k\rangle + \Gamma_{ij}^2 \langle X_2, X_k\rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k} = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$$

(ב) נגזור לפי כלל לייבניץ:

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}\langle X_i, X_j\rangle = \langle X_{ik}, X_j\rangle + \langle X_i, X_{jk}\rangle$$

נגזרת לפי u^k פירושה לגזור לפי המשתנה ה$-k$ כמובן.

6. בפשטות לא. אפשר להתבונן במשטחים שהמטריקות שלהם הן:

$$(g_{ij})_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (g_{ij})_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שמתאימות למשל לגלילים עם רדיוסים שונים.
מקדמי כריסטופל בשני המטריקות מתאפסים כולם, אך הן בוודאי לא זהות.

7. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, \cosh\phi)\,, X_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = \sinh^2\phi\cos^2\theta + \sinh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi = \cosh 2\phi$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\cos^2\theta = \cosh^2\phi$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh 2\phi \end{pmatrix}$$

נחשב את מקדמי כריסטופל.
אנחנו צריכים את:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh 2\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} \sinh 2\phi & 0 \\ 0 & 2\sinh 2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = \tanh\phi$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = -\tanh 2\phi$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = -\frac{1}{2}\tanh 2\phi$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = \tanh 2\phi$$

המשוואות הגיאודזיות שלנו הן:

$$\begin{cases} (\phi)'' + \Gamma_{ij}^{1}\left(\alpha^{1}\right)'\left(\alpha^{2}\right)' = 0 \\ (\theta)'' + \Gamma_{ij}^{2}\left(\alpha^{1}\right)'\left(\alpha^{2}\right)' = 0 \end{cases}$$

כאשר $\alpha = \left(\alpha^{1}, \alpha^{2}\right) = (\theta, \phi)$ הוא הקו הגיאודזי.
המעגל נמצא על מישור $z = 0$ ורדיוסו 1, ולכן:

$$(\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \sinh\phi) = (x, y, 0)$$

לכן $\phi = 0$, והמעגל שלנו הוא:

$$\beta(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s), 0)$$

כעת, אנו יודעים שהקו הגיאודזי הוא בפרמטריזציה במהירות יחידה, כלומר:

$$1 = \|\beta'(s)\| = \|(-\theta'\sin\theta, \theta\cos\theta, 0)\| = |\theta'|$$

גזרנו לפי כלל השרשרת. אם כן, $\theta' = \pm 1$ ולכן $\theta'' = 0$.
במצב הזה, בו $\phi = 0$ ו-$0 = \theta''$, אפשר לראות שהמשוואות הגיאודזיות אכן מתקיימות.

8. נבחר פרמטריזציות כלשהן (במידת הצורך).

(א) פרמטריזציה של הספירה היא:

$$(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

באופן טריוויאלי לאחר חישוב קליל נקבל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^{2}\sin^{2}\phi & 0 \\ 0 & r^{2} \end{pmatrix}$$

ומקדמי כריסטופל שלא מתאפסים הם:

$$\Gamma_{22}^{1} = -\sin\phi\cos\phi, \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \cot\phi$$

נסמן: $\alpha_1(t) = \phi(t), \alpha_2(t) = \theta(t)$ והמשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} \phi'' - \sin\phi\cos\phi\left(\phi'\right)^{2} = 0 \\ \theta'' + 2\cot\phi\phi'\theta' = 0 \end{cases}$$

המשוואה שנובעת מטבעיותה של הפרמטריזציה היא:

$$1 = \begin{pmatrix} \theta' & \phi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^{2}\sin^{2}\phi & 0 \\ 0 & r^{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לכתוב:

$$\begin{cases} \phi'' - \sin\phi\cos\phi\left(\phi'\right)^2 = 0 \\ \theta'' + 2\cot\phi\phi'\theta' = 0 \\ r^2\left(\phi'\right)^2 + r^2\sin^2\phi\left(\theta'\right)^2 = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\cot\phi\phi'$$

נבצע אינטגרציה dt על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\theta' = \int\frac{\theta''}{\theta'}dt = \int -2\cot\phi\phi' dt = -2\int\cot\phi d\phi = -2\ln\left(\sin\phi\right) + \ln C$$

כאשר משנים משתנה מ־t ל־ϕ, מקבלים $d\phi = \phi'(t)dt$. מכיוון שהאינטגרל אינו מסוים, הוספנו קבוע $\ln C$ (הוספנו בצורת $\ln$ לשם הנוחות).
אם כן, בעזרת חוקי לוגריתמים:

$$\theta' = \frac{C}{\sin^2\phi}$$

כעת, נציב את θ' במשוואה השלישית ונקבל:

$$r^2\left(\phi'\right)^2 + r^2\sin^2\phi\left(\frac{C}{\sin^2\phi}\right)^2 = 1$$

נבודד את ϕ' ונקבל:

$$\phi' = \frac{\sqrt{\sin^2\phi - r^2C^2}}{r\sin\phi}$$

נתבונן ב:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\phi'}{\theta'} = \frac{\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - r^2C^2}}{Cr}$$

ואם כן, $d\theta = \frac{Cr}{\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - r^2C^2}}d\phi$. לכן, מצד אחד:

$$\int d\theta = \theta$$

ומצד שני:

$$\int d\theta = \int\frac{Cr}{\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - r^2C^2}}d\phi = \int\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2C^2}{\sin^2\phi}}}\cdot\frac{Cr}{\sin^2\phi}d\phi =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - r^2C^2 + r^2C^2 \cot^2\phi}} \cdot \frac{Cr}{\sin^2\phi} d\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2C^2\cot^2\phi}{1-r^2C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2C^2} \cdot \sin^2\phi} d\phi$$

כעת, $(\cot\phi)' = -\frac{1}{\sin^2\phi}$. אם כן, נבצע החלפת משתנים:

$$p = \frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1 - r^2C^2}} \Longrightarrow dp = -\frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2C^2} \cdot \sin^2\phi} d\phi$$

ונקבל:

$$\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2C^2\cot^2\phi}{1-r^2C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2C^2} \cdot \sin^2\phi} d\phi = -\int \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}} dp$$

ולכן: $\theta = -\arcsin p - B = -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right) - B$. הוספנו קבוע B כי האינטגרל אינו מסוים.

לפיכך, קו גיאודזי נראה כך:

$$\alpha = \left(\phi, -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1 - r^2C^2}}\right) - B\right)$$

איך נראית עקומה גיאודזית?

אנו יודעים שעקומה גיאודזית על הספירה היא קשת של מעגל גדול; כעת נראה זאת.

אנו יודעים ש: $\theta = -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right) - B$, ולכן:

$$\frac{Cr\cot\phi}{\sqrt{1 - r^2C^2}} = -\sin(\theta + B)$$

נשתמש בזהות ל- $\sin$ של סכום זוויות ונקבל:

$$\frac{Cr\cos\phi}{\sqrt{1 - r^2C^2} \cdot \sin\phi} = -\sin\theta\cos B - \cos\theta\sin B$$

נכפול ב- $\sin\phi$:

$$\frac{Cr\cos\phi}{\sqrt{1 - r^2C^2}} = -\sin\theta\sin\phi\cos B - \cos\theta\sin\phi\sin B$$

נעבור מהקואורדינטות הספריות חזרה לקואורדינטות (x, y, z):

$$(x, y, z) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

לכן: $-\sin\phi\cos\theta = -\frac{x}{r}, -\sin\theta\sin\phi = -\frac{y}{r}, r\cos\phi = z$.

נסמן: $A_3 = \frac{C}{\sqrt{1-r^2C^2}}, A_1 = \frac{\sin B}{r}, A_2 = \frac{\cos B}{r}$ ונוכל לרשום:

$$A_3 z = -A_1 x - A_2 y$$

וזוהי משוואת מישור שעובר בראשית הצירים.
העקומה הגיאודזית נמצאת גם על המישור (כי היא מקיימת את משוואתו) וגם על הספירה, ולכן היא חלק מחיתוך המישור והספירה.
אנו יודעים שחיתוך של מישור שעובר בראשית ושל ספירה הוא מעגל גדול, ולכן העקומה הגיאודזית היא אכן קשת מעגל גדול.

(ב) פרמטריזציה של הגליל היא למשל:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta,\phi\right)$$

המטריקה היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc} r^{2} & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

וכל מקדמי כריסטופל מתאפסים. לכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} \theta''=0\\ \phi''=0 \end{cases}$$

נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases} \theta=at+b\\ \phi=ct+d \end{cases}$$

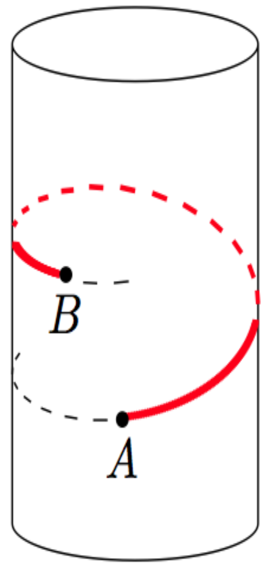
כלומר הקווים הגיאודזיים הם קווים ישרים:

$$\alpha(t)=\left(a,c\right)t+\left(b,d\right)$$

נציב בפרמטריזציה כדי לקבל את העקומות הגיאודזיות:

$$X\circ\alpha=\left(r\cos\left(at+b\right),r\sin\left(at+b\right),ct+d\right)$$

וזהו סליל לאורך הגליל.



(ג) לאחר חישוב נקבל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2\phi^2 & 0 \\ 0 & 1+r^2 \end{pmatrix}$$

ומקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{\phi}, \Gamma^2_{11} = -\frac{r^2}{1+r^2}\phi$$

לכן המשוואות הגיאודזיות יהיו:

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{2}{\phi}\theta'\phi' = 0 \\ \phi'' - \frac{r^2}{1+r^2}\phi\left(\theta'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

כמו כן, נדרוש שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית תהיה טבעית ונקבל:

$$1 = \left(\alpha'\right)^t \cdot (g_{ij}) \cdot (\alpha') = r^2\phi^2\left(\theta'\right)^2 + \left(1+r^2\right)\left(\phi'\right)^2$$

מהמשוואה הגיאודזית הראשונה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{\phi'}{\phi}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים לפי t ונקבל:

$$\ln\theta' = \int\frac{\theta''}{\theta'}dt = \int -2\frac{\phi'}{\phi}dt = -2\ln\phi + \ln C$$

הוספנו קבוע $\ln C$ כי האינטגרל לא מסוים. מחוקי הלוגריתמים נקבל:

$$\theta' = \frac{C}{\phi^2}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$1 = r^2\phi^2\left(\frac{C}{\phi^2}\right)^2 + \left(1+r^2\right)\left(\phi'\right)^2$$

נבודד את v' ונקבל:

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi' = \frac{\sqrt{\phi^2 - r^2C^2}}{\phi\sqrt{1+r^2}} \Longrightarrow dt = \frac{\phi\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{\phi^2-r^2C^2}}d\phi$$

לכן:

$$t = \int dt = \int \frac{\phi\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{\phi^2-r^2C^2}}d\phi = \sqrt{\left(1+r^2\right)\left(\phi^2-r^2C^2\right)} + B$$

הוספנו B כי האינטגרל לא מסוים. נחלץ את ϕ ונקבל:

$$\phi = \sqrt{\frac{\left(t-B\right)^2}{1+r^2} + r^2C^2}$$

נציב את ϕ שמצאנו חזרה במשוואה של θ':

$$\theta' = \frac{C}{\left(\frac{(t-B)^2}{1+r^2} + r^2C^2\right)} = \frac{1}{r^2C}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}$$

נאטגרץ ונקבל:

$$\theta = \int \frac{1}{r^2C}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}dt =$$

נחליף קלות את המשתנים:

$$p = \frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}} \Longrightarrow dp = \frac{1}{Cr\sqrt{1+r^2}}$$

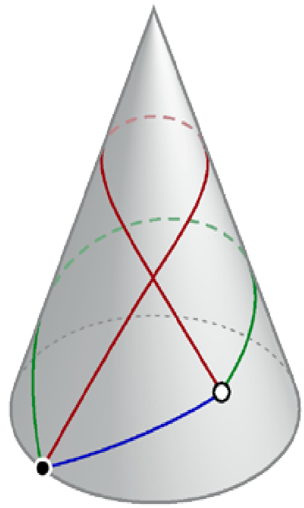
ונקבל:

$$\theta = \sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\cdot\int\frac{1}{1+p^2}dp = \sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan p + A = \sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A$$

ובסך הכל, הנוסחה לקו גיאודזי של החרוט היא:

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A, \sqrt{\frac{\left(t-B\right)^2}{1+r^2}+r^2C^2}\right)$$

העקומות הגיאודזיות על החרוט נראות כך:



(ד) נניח שהפרמטריזציה של המשטח היא $X(u,v)$.
לאחר חישוב אפשר להיווכח שמקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2v}.\Gamma_{11}^{2}=-\frac{1}{2v},\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2v}$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} u''+\frac{1}{v}u'v'=0 \\ v''-\frac{1}{2v}\left(u'\right)^{2}+\frac{1}{2v}\left(v'\right)^{2}=0 \end{cases}$$

בנוסף, יש לנו את המשוואה שנובעת מכך שהפרמטריזציה היא טבעית:

$$1=\left(\gamma'\right)^{t}\cdot G\cdot\left(\gamma'\right)=v\left(u'\right)^{2}+v\left(v'\right)^{2}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\frac{u''}{u'}=-\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה לפי t ונקבל:

$$\ln u=\int\frac{u''}{u'}dt=\int-\frac{v'}{v}dt=-\ln v+\ln C$$

כאשר $\ln C$ קבוע בנוהל. נקבל, אם כך:

$$u'=\frac{C}{v}$$

נציב זאת במשוואה השלישית:

$$1 = v\left(\frac{C}{v}\right)^2 + v\left(v'\right)^2$$

ולכן:

$$v' = \frac{\sqrt{v - C^2}}{v}$$

כעת, נתבונן ב:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{u'}{v'} = \frac{\frac{C}{v}}{\frac{\sqrt{v-C^2}}{v}} = \frac{C}{\sqrt{v - C^2}}$$

לכן: $du = \frac{C}{\sqrt{v-C^2}}dv$. אם כן:

$$u = \int du = \int \frac{C}{\sqrt{v - C^2}}dv = 2C\sqrt{v - C^2} + B$$

ולכן הקווים הגיאודזיים הם מהצורה:

$$\alpha(t) = \left(2C\sqrt{t - C^2} + B, t\right)$$

9. נמצא את המשוואות הגיאודזיות בעזרת מקדמי כריסטופל ונראה בכל סעיף האם הישרים עונים על הדרוש.

(א) מהגדרת המטריקה נקבל:

$$\left(g^{ij}\right) = \frac{1}{e^{x+y}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial y} = -\left(g_{ij}\right)$$

לפי הנוסחה נקבל:

$$\begin{gathered} \Gamma^1_{11} = \tfrac{1}{2} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \tfrac{1}{2} \\ \Gamma^1_{22} = -\tfrac{1}{2} \\ \Gamma^2_{11} = -\tfrac{1}{2} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \tfrac{1}{2} \\ \Gamma^2_{22} = -\tfrac{1}{2} \end{gathered}$$

(ב) המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + x'y' = 0 \\ y'' - \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + x'y' = 0 \end{cases}$$

נציב $y = x$ ונקבל:

$$x'' + \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 + x'x' = 0$$

כלומר $x'' + \left(x'\right)^2 = 0$. נציב $z = x'$ ונקבל:

$$z' + z^2 = 0$$

קל לראות שהפתרון הוא מהצורה:

$$z = \frac{1}{t - C}$$

כאשר C קבוע. למתקדמים: ברנולי. אם כך:

$$x' = \frac{1}{t - C} \Longrightarrow x = \ln|t - C| + B$$

כאשר B קבוע. לכן הקו הגיאודזי הוא:

$$\alpha(t) = (\ln|t - C| + B, \ln|t - C| + B)$$

(ג) נציב $y = 0$ במשוואות הגיאודזיות ונקבל:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

לכן $x' = 0$ ולכן $x = A$ כאשר A קבוע. קיבלנו נקודה:

$$\alpha = (A, 0)$$

ולא עקומה ולכן זו לא עקומה גיאודזית.

(ד) נציב $x = 1$ וכמו בסעיף הקודם נקבל שזו אינה עקומה גיאודזית.

8 התבנית היסודית השנייה, העתקת וויינגרטן ושימושיה

8.1 התבנית היסודית השנייה ועקמומיות גאוס

יהי M משטח רגולרי.

הנורמל למשטח בנקודה p הוא הנורמל למישור המשיק $T_p\left(M\right)$.

אנו יודעים שאם r פרמטריזציה של המשטח M, אז וקטורי הנגזרות X_1, X_2 פורשים את המישור המשיק.

לכן הם גם בת"ל, ולפי תכונות המכפלה הוקטורית הוקטור $r_1 \times r_2$ מאונך למישור המשיק $T_p\left(M\right)$.

נורמל היחידה למשטח הוא:

$$\vec{n} = \frac{X_1 \times X_2}{\left\|X_1 \times X_2\right\|}$$

מקומית, הנורמל משתנה בצורה רציפה, ולכן אפשר להגדיר העתקה: $\vec{n} : M \to S^2$ רציפה.

מכיוון שזהו וקטור יחידה, ההעתקה היא לתוך הספירה.

הגדרה 8.1 הפונקציה הרציפה הנ"ל נקראת **העתקת גאוס**.

הערה 8.2 כאשר המשטח נתון בצורה סתומה, $F\left(x,y,z\right) = 0$, נורמל היחידה הוא:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{\left\|\nabla F\right\|}$$

הגדרה 8.3 יהי M משטח ותהי $p \in M$.

בסביבת הנקודה p קיימת העתקת גאוס: $\vec{n} : M \to S^2$ והיא חלקה.

לכן, אפשר להתבונן בדיפרנציאל של $\vec{n}$: $d_p\vec{n} : T_p\left(M\right) \to T_{\vec{n}(p)}\left(S^2\right)$ המוגדר על ידי $d_p\vec{n}\left(v\right) = J_{\vec{n}}\left(v\right)$.

מכיוון שהנורמל הוא נורמל יחידה, אפשר להתייחס אל $T_{\vec{n}(p)}\left(S^2\right)$ כאל $T_p\left(M\right)$ ולכן להתייחס אל הדיפרנציאל כאל $d_p\vec{n} : T_p\left(M\right) \to T_p\left(M\right)$.

1. נגדיר את **אופרטור הצורה** $S : T_p\left(M\right) \to T_p\left(M\right)$ על ידי:

$$S\left(v\right) = -d_p\vec{n}\left(v\right)$$

2. נגדיר את **העתקת וויינגרטן** $W : T_p\left(M\right) \to T_p\left(M\right)$ על ידי:

$$W = -S$$

נזכור ש: $T_p\left(M\right)=span\left\{X_1,X_2\right\}$, ולכן אפשר להציג את $W\left(X_1\right),W\left(X_2\right)$ כצירופים ליניאריים של X_1,X_2:

$$W\left(X_1\right)=L_1^1X_1+L_2^1X_2$$

$$W\left(X_2\right)=L_1^2X_1+L_2^2X_2$$

כלומר, המטריצה המייצגת את ההעתקה היא:

$$\left(\begin{array}{cc} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{array}\right)=\left(L_j^i\right)$$

בהמשך נגדיר את העתקת וויינגרטן באופן מפורש.

כעת, אפשר להוכיח שמתקיים:

$$\langle W(a),b\rangle=\langle a,W(b)\rangle$$

לכל $a,b\in T_p\left(M\right)$. לכן W צמוד לעצמו ולכן W ניתן ללכסון וכל ערכיו העצמיים ממשיים.

הגדרה 8.4 נגדיר באמצעות W את **התבנית היסודית השנייה**.
זו תבנית ביליניארית $II:T_p\left(M\right)\times T_p\left(M\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$II\left(a,b\right)=-\left\langle W\left(a\right),b\right\rangle$$

אפשר להוכיח שהתבנית היסודית השנייה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$\left(L_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array}\right)$$

כאשר L_{ij} הם המקדמים של הנורמל בהצגה של וקטורי הנגזרות השניות:

$$X_{ij}=\Gamma_{ij}^1X_1+\Gamma_{ij}^2X_2+L_{ij}\vec{n}$$

כלומר: $II\left(a,b\right)=b^t\left(L_{ij}\right)a$.

איך נחשב את L_{ij}?

נכפיל את X_{ij} בנורמל $\vec{n}$ ונקבל:

$$\langle X_{ij},\vec{n}\rangle=\left\langle \Gamma_{ij}^{1}X_{1}+\Gamma_{ij}^{2}X_{2}+L_{ij}\vec{n},\vec{n}\right\rangle =\Gamma_{ij}^{1}\left\langle X_{1},\vec{n}\right\rangle +\Gamma_{ij}^{2}\left\langle X_{2},\vec{n}\right\rangle +L_{ij}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

כעת, מכיוון שהנורמל הוא וקטור יחידה מחד גיסא, ומאונך לוקטורי הנגזרות מאידך גיסא, נקבל:

$$L_{ij}=\langle X_{ij},\vec{n}\rangle$$

משפט 8.5 מתקיים:

$$L_{i}^{j}=-L_{ik}g^{kj}$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\left(\begin{array}{cc}
L_{1}^{1} & L_{2}^{1}\\
L_{1}^{2} & L_{2}^{2}
\end{array}\right)=-\left(\begin{array}{cc}
g^{11} & g^{12}\\
g^{21} & g^{22}
\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}
L_{11} & L_{12}\\
L_{21} & L_{22}
\end{array}\right)$$

<u>תרגיל תזכורת:</u>

יהי $z=f(x,y)$ משטח. חשבו את המטריקה של המשטח.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u,v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{u}=\left(1,0,f_{u}\right),X_{v}=\left(0,1,f_{v}\right)$$

ולכן מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered}
g_{11}=\left\langle X_{u},X_{u}\right\rangle =1+f_{u}^{2}\\
g_{12}=g_{21}=\left\langle X_{u},X_{v}\right\rangle =f_{u}f_{v}\\
g_{22}=\left\langle X_{v},X_{v}\right\rangle =1+f_{v}^{2}
\end{gathered}$$

ובסה"כ המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח הנתון על ידי המשוואה $z = f(x,y)$.

ידוע ש: $f(0,0) = 0$, והמישור המשיק למשטח בנקודה $(0,0,0)$ הוא מישור ה-xy:

$$T_0(M) = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

מצאו את התבנית היסודית השנייה.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בפרמטריזציה: $X(u,v) = (u,v,f(u,v))$.

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1,0,f_u), X_v = (0,1,f_v)$$

אנו יודעים שהמישור המשיק נפרש על ידי וקטורי הנגזרות, כלומר:

$$T_0(M) = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = span\{X_u, X_v\}$$

ובפרט $X_u, X_v \in T_0(M) = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ ולכן: $f_u(0) = f_v(0) = 0$.

כעת, וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = (0,0,f_{uu}), X_{uv} = (0,0,f_{uv}), X_{vv} = (0,0,f_{vv})$$

המישור שלנו הוא מישור xy, ולכן נורמל היחידה הוא $\vec{n} = (0,0,1)$.

איברי המטריצה (L_{ij}) הם:

$$\begin{gathered} L_{11} = X_{uu} \cdot \vec{n} = f_{uu} \\ L_{21} = L_{12} = X_{uv} \cdot \vec{n} = f_{uv} \\ L_{22} = X_{vv} \cdot \vec{n} = f_{vv} \end{gathered}$$

ולכן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix} = H_f$$

זו מטריצת ההסיאן של f.

נבדוק מה התבנית עושה כשמפעילים אותה על אותו הוקטור:

$$II\left(v,v\right)=v^{t}\left(L_{ij}\right)v=v^{t}H_{f}v=\sum_{i,j}f_{ij}v^{i}v^{j}$$

כאשר $v=\left(v^{1},v^{2}\right)$. אם נוסיף את האיברים ששווים לאפס:

$$II\left(v,v\right)=f\left(0,0\right)+v^{1}f_{u}+v^{2}f_{v}+\sum_{i,j}f_{ij}v^{i}v^{j}$$

וזהו פיתוח טיילור מסדר 2 של f סביב $\left(0,0\right)$, פעמיים.

אם כן, התבנית היסודית השנייה היא קירוב ריבועי לפעמיים המרחק של משטח מההיטל שלו על המישור המשיק.

מסקנה 8.6 כל משטח רגולרי M ניתן לסובב ולהזיז כך שנקודה p עוברת לראשית והמישור המשיק הוא מישור xy.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את התבניות היסודיות הראשונה והשנייה ואת המטריצה $\left(L_{j}^{i}\right)$ עבור המשטחים הבאים.

א. $X\left(\theta,\phi\right)=\left(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,k\phi\right)$. כאשר $\phi,k>0,\theta\in\left[0,2\pi\right]$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא חרוט.

נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_{\phi}=\left(\cos\theta,\sin\theta,k\right),X_{\theta}=\left(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{gathered}g_{22}=\left\langle X_{\phi},X_{\phi}\right\rangle =\cos^{2}\theta+\sin^{2}\theta+k^{2}=1+k^{2}\\
g_{12}=g_{21}=\left\langle X_{\phi},X_{\theta}\right\rangle =-\phi\cos\theta\sin\theta+\phi\cos\theta\sin\theta+0^{2}=0\\
g_{11}=\left\langle X_{\theta},X_{\theta}\right\rangle =\phi^{2}\sin^{2}\theta+\phi^{2}\cos^{2}\theta+0^{2}=\phi^{2}
\end{gathered}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי המטריצה:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}
\phi^{2} & 0\\
0 & 1+k^{2}
\end{array}\right)$$

כעת, נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$X_\theta \times X_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & k \end{vmatrix} = (k\phi\cos\theta, k\phi\sin\theta, -\phi)$$

לכן:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = \sqrt{k^2\phi^2\cos^2\theta + k^2\phi^2\sin^2\theta + \phi^2} = \phi\sqrt{1+k^2}$$

והנורמל הוא:

$$\frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(k\cos\theta, k\sin\theta, -1\right)$$

כעת, וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{\phi\phi} = (0,0,0)\,, X_{\theta\phi} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,, X_{\theta\theta} = (-\phi\cos\theta, -\phi\sin\theta, 0)$$

ולכן איברי המטריצה B הם:

$$\begin{gathered} L_{11} = X_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = \tfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(k\phi\cos^2\theta + k\phi\sin^2\theta\right) = \tfrac{k\phi}{\sqrt{1+k^2}} \\ L_{21} = L_{12} = X_{\theta\phi}\cdot\vec{n} = k\cos\theta\sin\theta - k\cos\theta\sin\theta = 0 \\ L_{22} = X_{\phi\phi}\cdot\vec{n} = 0 \end{gathered}$$

ולכן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{k\phi}{\sqrt{1+k^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

את המטריצה $\left(L_j^i\right)$ נחשב על ידי:

$$L_i^j = -L_{ik}g^{kj}$$

(g_{ij}) מטריצה אלכסונית ולכן ההופכית היא:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+k^2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right)=-\begin{pmatrix}\frac{1}{\phi^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+k^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{k\phi}{\sqrt{1+k^2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{k}{\phi\sqrt{1+k^2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ב. $X\left(u,v\right)=\left(u\cos v,u\sin v,kv\right)$ כאשר $u,k>0,v\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא הליקואיד.

נחשב את וקטורי הנגזרות:

$$X_u=\left(\cos v,\sin v,0\right),X_v=\left(-u\sin v,u\cos v,k\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$\begin{aligned}g_{11}&=\langle X_u,X_u\rangle=\cos^2 v+\sin^2 v=1\\ g_{12}=g_{21}&=\langle X_u,X_v\rangle=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v+0=0\\ g_{22}&=\langle X_v,X_v\rangle=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+k^2=u^2+k^2\end{aligned}$$

ולכן התבנית היסודית הראשונה נתונה על ידי המטריצה:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+k^2\end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & k\end{vmatrix}=\left(k\sin v,-k\cos v,u\right)$$

לכן:

$$\|X_u\times X_v\|=\sqrt{k^2\sin^2 v+k^2\cos^2 v+u^2}=\sqrt{k^2+u^2}$$

ולכן הנורמל הוא:

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{u^2+k^2}}\left(k\sin v,-k\cos v,u\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = (0,0,0)\,, X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)\,, X_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

נחשב את איברי המטריצה (L_{ij}):

$$\begin{gathered}L_{11} = X_{uu}\cdot\vec{n} = 0\\ L_{21} = L_{12} = X_{uv}\cdot\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{k^2+u^2}}\left(k\cos^2 v + k\sin^2 v\right) = -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}}\\ L_{22} = X_{vv}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(-uk\sin v\cos v + uk\sin v\cos v\right) = 0\end{gathered}$$

ולכן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

כעת, המטריצה ההופכית של (g_{ij}) היא:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2+u^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{\sqrt{u^2+k^2}} \\ \frac{k}{(k^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

מה נותנת לנו העתקת ויינגרטן (או אופרטור הצורה) מבחינה גיאומטרית?

הגדרה 8.7 יהי M משטח. **עקמומיות גאוס** מוגדרת (בכל נקודה) על ידי:

$$K = \det\left(L^i_j\right)$$

אם $K>0$ הנקודה היא נקודה אליפטית (המשטח דומה לאליפסואיד בסביבת הנקודה).
אם $K<0$ הנקודה היא נקודה היפרבולית (המשטח דומה לאוכף בסביבת הנקודה).
אם $K=0$ הנקודה היא נקודה פרבולית (המשטח דומה למישור/גליל בסביבת הנקודה).

נדגים זאת על טורוס.

ניקח פרמטריזציה של מעגל שאינו מקיף את הראשית:

$$\alpha\left(\phi\right)=\left(a\cos\phi+b,0,a\sin\phi\right)$$

כאשר $0<a<b$, $\phi\in\left[0,2\pi\right]$ ונסובב אותה סביב ציר ה$-z$ כדי לקבל טורוס:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(a\cos\phi+b\right)\cos\theta,\left(a\cos\phi+b\right)\sin\theta,a\sin\phi\right)$$

זהו משטח סיבוב; התבנית היסודית הראשונה היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}
\left(a\cos\phi+b\right)^{2} & 0\\
0 & 1
\end{array}\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{\theta}=\left(-\left(a\cos\phi+b\right)\sin\theta,\left(a\cos\phi+b\right)\cos\theta,0\right)$$

$$X_{\phi}=\left(-a\sin\phi\cos\theta,-a\sin\phi\sin\theta,a\cos\phi\right)$$

נחשב את הנורמל ונקבל:

$$\vec{n}=\frac{X_{\theta}\times X_{\phi}}{\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert }=\left(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\right)$$

נחשב את וקטורי הנגזרות השניות, נכפיל בנורמל ונקבל:

$$\left(L_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}
-a\cos\phi\left(a\cos\phi+b\right) & 0\\
0 & -a
\end{array}\right)$$

ולכן:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=\left(\begin{array}{cc}
\frac{\cos\phi}{a\cos\phi+b} & 0\\
0 & \frac{1}{a}
\end{array}\right)$$

ונקבל ש:

$$K=\frac{\cos\phi}{a\left(a\cos\phi+b\right)}$$

מכיוון ש: $0 < a < b$, סימנה של העקמומיות נקבע על ידי המונה בלבד.

$K = 0$ כאשר $\cos\phi = 0$, כלומר $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

אלו הנקודות העליונה והתחתונה במעגל, וכשנסובב אותו נקבל את המעגלים העליון והתחתון בטורוס.

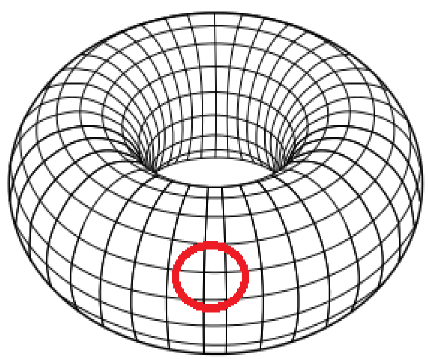
$K > 0$ כאשר $\cos\phi > 0$, כלומר $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$.

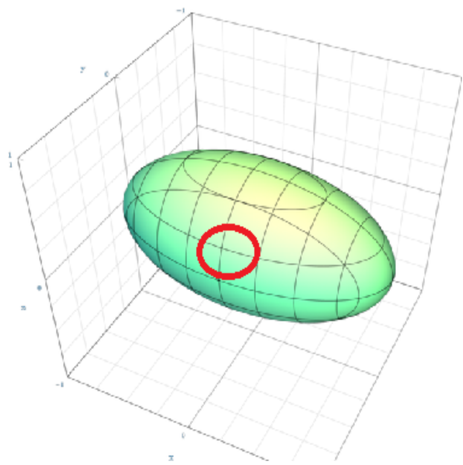
זהו הצד השמאלי של המעגל, הרחוק מראשית הצירים; כשנסובב אותו נקבל את הצד החיצוני בטורוס.

$K < 0$ כאשר $\cos\phi < 0$, כלומר $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$.

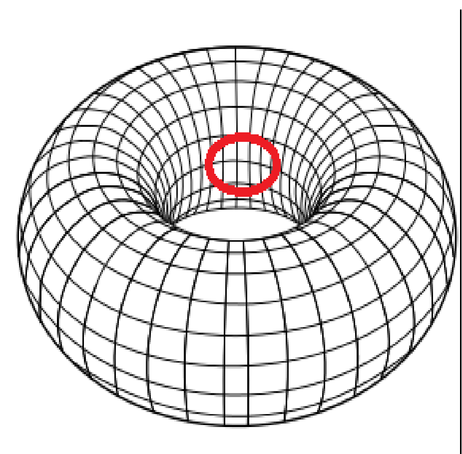
זהו הצד הימני של המעגל, הקרוב לראשית הצירים; כשנסובב אותו נקבל את הצד הפנימי של הטורוס.

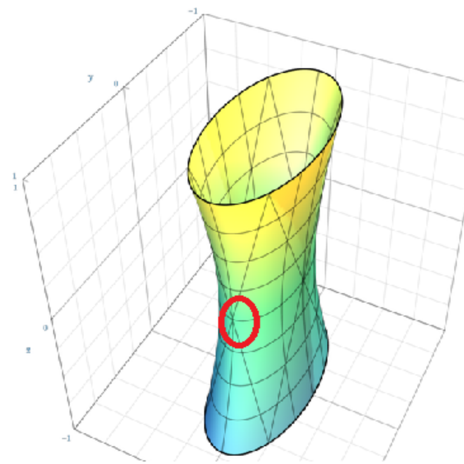
חשבו על כך. כאשר מסתכלים על הטורוס מבחוץ, באופן מקומי (מוקף באדום) הוא נראה כאליפסואיד:





מצד שני, אם נסתכל עליו מבפנים, באופן מקומי (מוקף באדום) הוא נראה כהיפרבולואיד:





אפשר לראות זאת גם באופן הבא ־ מי המשטח ש"ימלא" את החור של הטורוס בצורה הטובה ביותר? ההיפרבולואיד (כמו שהג'נט "ממלא" את החור בצמיג).

8.2 העתקת וויינגרטן ושימושיה

בקטע הקודם הגדרנו את העתקת וויינגרטן באמצעות התבניות היסודיות.

8.2.1 הגדרת העתקת וויינגרטן

מה עושה ההעתקה מבחינה גיאומטרית?

הגדרה 8.8 העתקת וויינגרטן $W : T_p(M) \to T_p(M)$ מוגדרת על ידי:

$$W(v) = \nabla_v \vec{n}$$

כלומר, התמונה של v היא הנגזרת הכיוונית של הנורמל בכיוון הוקטור v.

הערה 8.9 אפשר לראות שמתקיים:

$$W(X_1) = L^1_2 X_1 + L^1_2 X_2 = \vec{n}_1$$

$$W(X_2) = L^2_1 X_1 + L^2_2 X_2 = \vec{n}_2$$

כאשר $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ הם וקטורי הנגזרות של הנורמל.

אם כן, אפשר לחשב את העתקת ויינגרטן ע"י מציאת ההצגה של הוקטורים $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ כצירופים ליניאריים של הוקטורים X_1, X_2.

<u>לדוגמה:</u>

נחשב את העתקת ויינגרטן של הטורוס:

$$X(\theta, \phi) = ((a\cos\phi + b)\cos\theta, (a\cos\phi + b)\sin\theta, a\sin\phi)$$

אם כן, וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = (-(a\cos\phi + b)\sin\theta, (a\cos\phi + b)\cos\theta, 0)$$

$$X_\phi = (-a\sin\phi\cos\theta, -a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)$$

והנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$$

נביע את וקטורי הנגזרות של הנורמל כצירופים ליניאריים של X_θ, X_ϕ:

$$\vec{n}_\theta = (-\cos\phi\sin\theta, \cos\phi\cos\theta, 0) = \frac{\cos\phi}{a\cos\phi + b} \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi) = 0 \cdot X_\theta + \frac{1}{a} \cdot X_\phi$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\cos\phi}{a\cos\phi+b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

לדעתי זה מעט יותר קצר מלחשב בעזרת התבנית היסודית השנייה (כמו שראינו מקודם).

הערה 8.10 בדומה לתבניות היסודיות (וכפי שהסברנו בהרחבה ביחס לתבנית היסודית הראשונה), גם אל העתקת ויינגרטן אפשר להתייחס בשני אופנים. מצד אחד, אפשר להסתכל עליה כעל העתקה מהמישור המשיק לעצמו (כלומר, לוקחת וקטור ממימד 2 לוקטור ממימד 2), ואז המטריצה המייצגת היא:

$$\begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 \\ L^2_1 & L^2_2 \end{pmatrix}$$

כמו שראינו.

מצד שני, אפשר להסתכל על העתקת ויינגרטן כעל העתקה מהמישור המשיק אל המרחב (כלומר, לוקחת וקטר ממימד 2 לוקטור ממימד 3), ואז המטריצה המייצגת היא:

$$J_{\vec{n}}$$

מטריצת יעקובי של הנורמל, כפי שראינו.

נשתמש בעובדה הזו, ונסתכל על ההעתקה פעם באופן הזה ופעם באופן הזה.

8.2.2 עקמומיות ממוצעת ועקמומיות ראשיות

הגדרה 8.11 בנקודה $p \in M$,

1. **הכיוונים הראשיים** הם הוקטורים העצמיים של $\left(L_j^i\right)$.
2. **העקמומיות הראשיות** הן הערכים העצמיים של $\left(L_j^i\right)$; נסמנן ב$-k_1, k_2$.

אכן, יש כאן פער לשוני מסוים שקשה לגשר עליו בעברית. למילה עקמומיות אין רבים בשפה העברית (בעוד שבאנגלית אפשר לדבר על $curvatures$).

3. **עקמומיות גאוס**, כפי שראינו, היא $K = \det\left(L_j^i\right) = k_1 \cdot k_2$.
4. **העקמומיות הממוצעת** היא $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}tr\left(L_j^i\right)$.
5. **משטח מינימלי** הוא משטח שבו $H = 0$ בכל נקודה.
6. **קו עקמומיות** הוא עקומה $\beta : [a,b] \to M$ עבורה $\beta'(t)$ כיוון ראשי לכל t.

בהמשך נסביר מעט על המשמעות הגיאומטריות של העקמומיות הראשיות והעקמומיות הממוצעת (כמו שהסברנו ביחס לעקמומיות גאוס).

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח כך ש: $H = K = 0$ בכל נקודה.

הוכיחו ש$-M$ הוא (חלק מ) מישור.

<u>פתרון:</u>

יש לנו שתי משוואות:

$$\begin{cases} K = k_1 k_2 = 0 \\ H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0 \end{cases}$$

ולכן k_1, k_2 שווים ל-0.

לכן הערך העצמי היחיד של W הוא 0, ומכיוון ש$-W$ צמוד לעצמו נקבל ש$-W = 0$.

נזכור ש:

$$W = J_{\vec{n}}$$

ומכיוון שהיעקוביאן הוא 0, הנורמל קבוע: $\vec{n}=c$.
הנורמל למשטח קבוע ולכן המשטח הוא (חלק מ) מישור.

<u>תרגיל:</u>

עבור המשטחים הבאים, מצא את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

א. חרוט: $X(\theta,\phi)=(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,k\phi)$.

<u>פתרון:</u>

חישבנו את העתקת ויינגרטן של החרוט באחד מהתרגילים הקודמים:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=-\begin{pmatrix}\frac{k}{\phi\sqrt{1+k^{2}}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן, ערכי העקמומיות הראשיים הם: $k_{1}=0,k_{2}=-\frac{k}{\phi\sqrt{1+k^{2}}}$, ולכן:

$$K=0,H=-\frac{k}{2\phi\sqrt{1+k^{2}}}$$

ב. הליקואיד: $X(u,v)=(u\cos v,u\sin v,kv)$.

<u>פתרון:</u>

העתקת ויינגרטן של ההליקואיד היא:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{k}{\sqrt{u^{2}+k^{2}}}\\ \frac{k}{\left(k^{2}+u^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} & 0\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K=\det\left(L_{j}^{i}\right)=-\frac{k^{2}}{\left(k^{2}+u^{2}\right)^{2}},H=\frac{1}{2}trW=0$$

אם כן, בהמשך לתרגיל הקודם, ניתן לראות שכאשר העקמומיות הממוצעת או עקמומיות גאוס מתאפסות לבדן, לא ניתן להסיק שהמשטח מישורי.

8.2.3 המשמעות הגיאומטרית של העקמומיות הראשיות והעקמומיות הממוצעת

משפט 8.12 יהי v כיוון ראשי המתאים לעקמומיות ראשית k. תהי $\beta(s)$ עקומה גיאודזית המקיימת: $\beta'(0)=v$.

אזי, העקמומיות של β (כעקומה מרחבית) מקיימת:

$$k_{\beta}(0)=|k|$$

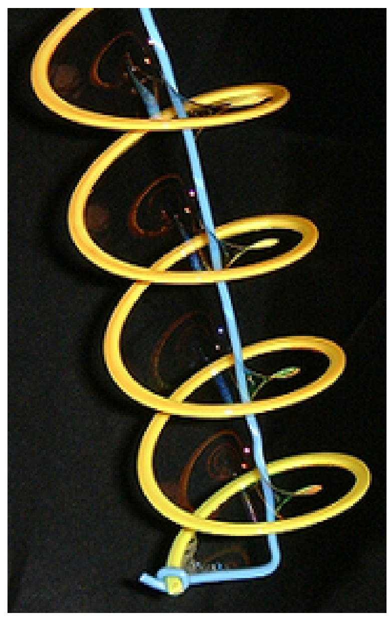
כלומר, העקמומיות הראשיות בנקודה הן העקמומיות של העקומות הגיאודזיות שמתחילות בנקודה.

משפט 8.13 תהי β עקומה מרחבית. מבין כל המשטחים ששפתם היא העקומה β, המשטח ששטח הפנים שלו מינימלי הוא משטח מינימלי.

המשפט אינו שימושי במיוחד (לפחות בקורס שלנו), אך נותן אינטואיציה טובה ל"מינימליות" של משטחים מינימליים - במה הם מינימליים.

בטבע, משטחים מינימליים מופיעים ב"קרומי סבון" ($Soap\ films$). קרומי סבון נוצרים כשטובלים צורה במי־סבון. אנו רגילים לטבול טבעת ולקבל עיגול של קרום סבון (שהוא מישורי ואכן משטח מינימלי), אך אם נטבול צורות אחרות, נקבל קרומי סבון שונים.

הליקואיד, למשל, שראינו שהוא משטח מינימלי ($H = 0$), הוא קרום סבון מסביב לסליל:



הקטנואיד הוא קרום סבון בין שני מעגלים.

זאת, מכיוון שמולקולות הסבון שואפות להיות קרובות זו לזו כמה שיותר, אך גם לשפה שיכולה להיות טבעת, סליל וכן הלאה (ואן דר ואלס), ולכן יוצרות משטח ששטח הפנים שלו מינימלי.

משטח כזה, לפי המשפט שלנו, הוא אכן מינימלי.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח מינימלי. הוכיחו ש:

$$K \leq 0$$

בכל נקודה.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהמשטח מינימלי,

$$0 = H = \frac{1}{2} tr\left(L^i_j\right) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

כאשר k_1, k_2 הן העקמומיות הראשיות, הערכים העצמיים של $\left(L^i_j\right)$. נקבל:

$$k_1 = -k_2$$

ולכן:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = k_1 k_2 = -k_1^2 \leq 0$$

כנדרש.

מסקנה 8.14 מקומית, משטח מינימלי דומה בכל נקודה להיפרבולואיד או לגליל/מישור, אך לא לאליפסואיד.

אם כן, כשהסבון הופך לבועה, הוא כבר לא משטח מינימלי (ואפילו "להיפך").

עוד על משטחים מינימליים - בקטע הבא.

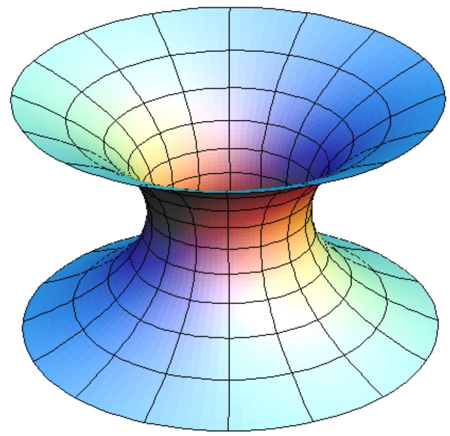
8.2.4 משטחים מינימליים

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שהקטנואיד $(catenoid)$ שהוא משטח הסיבוב של העקומה $x = \cosh z$ הוא משטח מינימלי.

<u>פתרון:</u>

הקטנואיד נראה כך:



אם כן, נחשב את העתקת ויינגרטן.
פרמטריזציה של העקומה היא:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(\cosh\phi,0,\phi\right)$$

ולכן פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\cosh\phi\cos\theta,\cosh\phi\sin\theta,\phi\right)$$

נזכור ש:

$$\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2},\sinh t=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

ובזהויות בסיסיות של הפונקציות ההיפרבולית, כגון:

$$\left(\cosh t\right)'=\sinh t,\left(\sinh t\right)'=\cosh t,1=\cosh^{2}t-\sinh^{2}t$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{\phi}=\left(\sinh\phi\cos\theta,\sinh\phi\sin\theta,1\right),X_{\theta}=\left(-\cosh\phi\sin\theta,\cosh\phi\cos\theta,0\right)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11}=\langle X_{\theta},X_{\theta}\rangle=\cosh^{2}\phi\sin^{2}\theta+\cosh^{2}\phi\cos^{2}\theta=\cosh^{2}\phi$$
$$g_{12}=g_{21}=\langle X_{\phi},X_{\theta}\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle X_{\phi},X_{\phi}\rangle=\sinh^{2}\phi\cos^{2}\theta+\sinh^{2}\phi\sin^{2}\theta+1=\sinh^{2}\phi+1=\cosh^{2}\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את הנורמל:

$$X_\theta \times X_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cosh\phi\sin\theta & \cosh\phi\cos\theta & 0 \\ \sinh\phi\cos\theta & \sinh\phi\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, -\cosh\phi\sinh\phi)$$

לכן:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = \sqrt{\cosh^2\phi\cos^2\theta + \cosh^2\phi\sin^2\theta + \cosh^2\phi\sinh^2\phi} = \sqrt{\cosh^2\phi\left(1+\sinh^2\phi\right)} =$$

$$= \sqrt{\cosh^4\phi} = \cosh^2\phi$$

והנורמל הוא:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{1}{\cosh^2\phi}(\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, -\cosh\phi\sinh\phi)$$

כלומר: $\vec{n} = \frac{1}{\cosh\phi}(\cos\theta, \sin\theta, \sinh\phi)$.
נחשב את וקטורי הנגזרות השניות:

$$X_{\phi\phi} = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, 0)$$
$$X_{\phi\theta} = (-\sinh\phi\sin\theta, \sinh\phi\cos\theta, 0)$$
$$X_{\theta\theta} = (-\cosh\phi\cos\theta, -\cosh\phi\sin\theta, 0)$$

מכאן, נוכל לחשב את איברי המטריצה (L_{ij}):

$$L_{11} = \langle X_{\theta\theta}, \vec{n}\rangle = (-\cosh\phi\cos\theta, -\cosh\phi\sin\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh\phi}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh\phi) = 1$$
$$L_{21} = L_{12} = \langle X_{\phi\theta}, \vec{n}\rangle = (-\sinh\phi\sin\theta, \sinh\phi\cos\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh\phi}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh\phi) = 0$$
$$L_{22} = \langle X_{\phi\phi}, \vec{n}\rangle = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, 0)\cdot\tfrac{1}{\cosh\phi}(-\cos\theta, -\sin\theta, \sinh\phi) = -1$$

ולכן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נזכור ש: $L_i^j = -L_{ik}g^{kj}$, ולכן:

$$\left(L_j^i\right) = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2\phi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\cosh^2\phi} \end{pmatrix}$$

ולכן הע"ע של $\left(L_j^i\right)$ הם: $k_{1,2} = \pm\frac{1}{\cosh^2\phi}$, ואכן:

$$H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0$$

ולכן הקטנואיד הוא אכן משטח מינימלי.

הגדרה 8.15 תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה במשתנים x,y, $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. **הלפלסיאן** של f מוגדר על ידי:

$$\Delta f = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy}$$

באופן כללי, הלפלסיאן של פונקציה (סקלרית או וקטורית) הוא סכום הנגזרות השניות לפי כל אחד מהמשתנים:

$$\Delta f = \sum f_{ii}$$

<u>לדוגמה:</u>

1. נתבונן בפונקציה: $f(x,y) = x^2y^2 + e^x\sin y$. נקבל:

$$f_{xx} = 2y^2 + e^x\sin y$$

$$f_{yy} = 2x^2 - e^x\sin y$$

ולכן:

$$\Delta f = 2\left(x^2+y^2\right)$$

2. נתבונן בפונקציה: $X(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. נקבל:

$$X_{uu} = -(\cos u, \sin u, 0)$$

$$X_{vv} = \vec{0}$$

ולכן:

$$\Delta X = -\left(\cos u, \sin u, 0\right)$$

הגדרה 8.16 יהי M משטח עם פרמטריזציה $X\left(u,v\right)$.

הפרמטריזציה $X\left(u,v\right)$ נקראת **איזותרמית** והקואורדינטות u,v נקראות **איזותרמיות**, אם התבנית היסודית הראשונה מיוצגת על ידי מטריצה סקלרית.

כלומר, קיימת $f\left(u,v\right)$ פונקציה סקלרית עבורה:

$$\left(g_{ij}\right) = f^{2}\left(u,v\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>לדוגמה:</u>

1. ראינו בתחילת הקטע שמשטח הסיבוב של העקומה $x = \cosh z$, הלא הוא הקטנואיד עם הפרמטריזציה:

$$X\left(\theta,\phi\right) = \left(\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi\right)$$

מקיים:

$$X = \cosh^{2}\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן זו פרמטריזציה איזותרמית של הקטנואיד.

2. ראינו בעבר פרמטריזציות שונות של הספירה, ביניהן הספירה כמשטח סיבוב:

$$X\left(\theta,\phi\right) = \left(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\right)$$

וההטלה הסטריאוגרפית:

$$F\left(u,v\right) = \frac{1}{u^{2}+v^{2}+1}\left(2u, 2v, u^{2}+v^{2}-1\right)$$

הפרמטריזציה f אינה איזותרמית, מכיוון שעבורה:

$$(g_{ij}) = \left(\begin{array}{cc} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

לעומתה, הפרמטריזציה F כן איזותרמית, מכיוון שעבורה:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

משפט 8.17 תהי תהי $X(u,v)$ פרמטריזציה איזותרמית עם פונקציה f:

$$(g)_{ij} = f^2\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

אזי מתקיים:

$$\Delta(X) = -2f^2H\vec{n}$$

כאשר H זו העקמומיות הממוצעת ו–$\vec{n}$ הוא וקטור הנורמל.
נוכיח את המשפט בתרגילים הנוספים.

מסקנה 8.18 אם המשטח מינימלי, $H=0$ ולכן $\Delta(X)=0$, ולהיפך.
לכן, **בקואורדינטות איזותרמיות**, משטח עם פרמטריזציה X הוא מינימלי אם ורק אם $\Delta(X)=0$.

<u>לדוגמה:</u>
נראה שהקטנואיד הוא משטח מינימלי.
הקואורדינטות אכן איזותרמיות, כפי שראינו:

$$(g_{ij}) = \cosh^2\phi\cdot\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

כעת, נחשב את הלפלסיאן של X.
אנו צריכים לבדוק את הלפלסיאן על כל אחד מהרכיבים של X; נסמן:

$$X(\theta,\phi) = (X_1,X_2,X_3) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$$

כעת:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial\theta^2} = -\cosh\phi\cos\theta, \frac{\partial^2 X_1}{\partial\phi^2} = \cosh\phi\cos\theta$$

ואכן:

$$\Delta X_1 = \frac{\partial^2 X_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial\phi^2} = 0$$

באופן דומה:

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial\theta^2} = -\cosh\phi\sin\theta, \frac{\partial^2 X_2}{\partial\phi^2} = \cosh\phi\sin\theta$$

ואכן:

$$\Delta X_2 = \frac{\partial^2 X_2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial\phi^2} = 0$$

ועבור הקואורדינטה השלישית:

$$\frac{\partial^2 X_3}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^2 X_3}{\partial\phi^2} = 0$$

ואם כן:

$$\Delta X_3 = \frac{\partial^2 X_3}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial\phi^2} = 0$$

ובסך הכל:

$$\Delta X = 0$$

הערה 8.19 באמצעות הפרמטריזציה האיזותרמית המתאימה להטלה הסטריאוגרפית, אפשר להראות שהספירה אינה משטח מינימלי.

הגדרה 8.20 פונקציה f עבורה $\Delta f = 0$ נקראת **הרמונית**.

לפונקציות כאלו יש חשיבות רבה בתחומים שונים במתמטיקה, כמו משוואות מעבר חום ואנליזה מרוכבת.

אם כן, אם הפרמטריזציה X איזותרמית, המשטח הוא מינימלי אם ורק אם X הרמונית.

תרגילים נוספים

1. הוכיחו את הזהות הבאה: $\vec{n}_j = -g^{ik}L_{kj}X_i$.

2. מצאו את עקמומיות גאוס של המשטח:

$$X(\theta,\phi) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$$

בעזרת התבניות היסודיות.
מצאו גם את מקדמי כריסטופל והמשוואות הגיאודזיות (אין צורך לפתור אותן).

3. נתון המשטח הבא ב־$\mathbb{R}^3$: $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = y^3\right\}$.

   (א) מהי עקמומיות גאוס K של M?

   (ב) הוכיחו שהקו $L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\right\}$ הוא עקומה גיאודזית של M.

4. מצאו את העתקת ויינגרטן של החרוט $X(\theta,\phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, k\phi)$ באופן מפורש.
כלומר, הציגו את וקטורי הנגזרות של הנורמל כצירופים ליניאריים של וקטורי הנגזרות של הפרמטריזציה.

5. נתבונן במשטח הסיבוב של העקומה $\beta(\phi) = (r(\phi), 0, \phi)$. נניח שהוא משטח מינימלי. הוכיחו שהוא מישור או קטנואיד.

6. הראו שבאופן מקומי הקטנואיד איזומטרי להליקואיד. כלומר, מצאו החלפת קואורדינטות שבהן המטריקות שוות.

7. תהיינה $f,g \in C^\infty(\mathbb{R})$. חשבו את עקמומיות גאוס והעקמומיות הממוצעת של המשטח:

$$z = f(x) + g(y)$$

8. הוכיחו שהמשטחים הבאים הם משטחים מינימליים:

   (א) משטח אנפר:

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

(ב) משטח הנברג:

$$X\left(u,v\right)=\left(2\cos v\sinh u-\frac{2}{3}\cos 3v\sinh 3u,2\sin v\sinh u-\frac{2}{3}\sin 3v\sinh 3u,2\cos 2v\cosh 2u\right)$$

(ג) משטח בור:

$$X\left(u,v\right)=\left(u\cos v-\frac{u^{2}\cos 2v}{2},-u\sin v-\frac{u^{2}\sin 2v}{2},\frac{4u^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3v}{2}}{3}\right)$$

(ד) משטח שרק (נשבע שככה קוראים לו):

$$X\left(u,v\right)=\left(u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$$

9. תהי $X\left(u,v\right)$ פרמטריזציה איזותרמית עם פונקציה f:

$$\left(g\right)_{ij}=f^{2}\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\end{array}\right)$$

הוכיחו שמתקיים:

$$\Delta\left(X\right)=-2f^{2}H\vec{n}$$

פתרונות

1. נתבונן בהעתקת ויינגרטן. מצד אחד,

$$W = d_{\vec{n}} = J_{\vec{n}} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

ומצד שני:

$$-\left(L^i_{\ j}\right) = \left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11}L_{11} + g^{12}L_{21} & g^{11}L_{12} + g^{12}L_{22} \\ g^{21}L_{11} + g^{22}L_{21} & g^{21}L_{12} + g^{22}L_{22} \end{pmatrix}$$

נזכור שהדיפרנציאל הוא איזומורפיזם בין המישור המשיק לבין $\mathbb{R}^2$, שמתאים בין וקטור במישור המשיק לבין וקטור הקואורדינטות שלו לפי הבסיס $\{X_1, X_2\}$.
לכן:

$$-\vec{n}_j = \left(g^{11}L_{1j} + g^{12}L_{2j}\right)X_1 + \left(g^{21}L_{1j} + g^{22}L_{2j}\right)X_2 = g^{ik}L_{kj}X_i$$

ואכן $\vec{n}_j = -g^{ik}L_{kj}X_i$.

2. קצת עבודה שחורה. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\sin\theta, -2\sin\phi), X_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta, 2\sin\phi\cos\theta, 0)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{22} = \langle X_\phi, X_\phi\rangle = 4\cos^2 t\cos^2\theta + 4\cos^2 t\sin^2\theta + 4\sin^2 t = 4$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle X_\phi, X_\theta\rangle = 0$$
$$g_{11} = \langle X_\theta, X_\theta\rangle = 4\sin^2\phi\sin^2\theta + 4\sin^2\phi\cos^2\theta = 4\sin^2\phi$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

נחשב את איברי המטריצה (L_{ij}). וקטורי הנגזרות השניות:

$$X_{\phi\phi} = (-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, -2\cos\phi)$$
$$X_{\phi\theta} = X_{\theta\phi} = (-2\cos\phi\sin\theta, 2\cos\phi\cos\theta, 0)$$
$$X_{\theta\theta} = (-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, 0)$$

נחשב את הנורמל. המכפלה הוקטורית היא:

$$-X_\theta \times X_\phi = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(4\sin^2\phi\cos\theta, 4\sin^2\phi\sin\theta, 4\cos\phi\sin\phi\right)$$

אם כן:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = \sqrt{16\sin^4\phi\cos^2\theta + 16\sin^4\phi\sin^2\theta + 16\cos^2\phi\sin^2\phi} = 4\sin\phi$$

ולכן:

$$\vec{n} = -\frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = -\left(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\right)$$

כעת:

$$L_{22} = X_{\phi\phi}\cdot\vec{n} = -2\sin^2\phi\cos^2\theta - 2\sin^2\phi\sin^2\theta - 2\cos^2\phi = -2$$
$$L_{21} = L_{12} = X_{\phi\theta}\cdot\vec{n} = 0$$
$$L_{11} = X_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = -2\sin^2\phi\cos^2\theta - 2\sin^2\phi\sin^2\theta = -2\sin^2\phi$$

ולכן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את אופרטור הצורה:

$$\left(L^i_j\right) = -\left(g^{ij}\right)(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולכן $K = \frac{1}{4}$.

נחשב את מקדמי כריסטופל; אנו צריכים את:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4\sin^2\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(g_{ij})}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} 8\cos\phi\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,2} & g_{12,2} \\ g_{21,2} & g_{22,2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(g_{ij})}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11,1} & g_{12,1} \\ g_{21,1} & g_{22,1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = \cot\phi$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}\right) = -\sin\phi\cos\phi$$

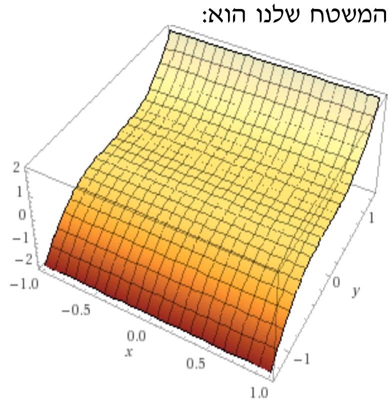
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{21}\left(g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) + \frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right) = 0$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} \phi'' + 2\cot\phi\cdot\phi'\theta' = 0 \\ \theta'' - \sin\phi\cos\phi\cdot\phi'\left(\theta'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

3. המשטח שלנו הוא:



(א) פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X(u,v) = \left(u, v, v^3\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1,0,0), X_v = \left(0,1,3v^2\right)$$

מקדמי המטריקה הן:

$$\begin{gathered} g_{11} = \langle X_u, X_u\rangle = 1 \\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v\rangle = 0 \\ g_{22} = \langle X_v, X_v\rangle = 1 + 9v^4 \end{gathered}$$

ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+9v^4 \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = \vec{0}, X_{uv} = X_{vu} = \vec{0}, X_{vv} = (0,0,6v)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = \left(0,-3v^2,1\right)$$

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{\left(0,-3v^2,1\right)}{\sqrt{1+9v^4}}$$

איברי המטריצה (L_{ij}) הם:

$$L_{11} = L_{21} = L_{22} = \langle X_{uu}, \vec{n}\rangle = \langle X_{uv}, \vec{n}\rangle = 0$$

$$L_{22} = \langle X_{vv}, \vec{n}\rangle = \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}}$$

לכן המטריצה היא:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה $\left(L^i_j\right)$:

$$\left(L^i_j\right) == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9v^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{(1+9v^4)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

ולכן עקמומיות גאוס היא:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = 0$$

שימו לב שמקומית המשטח די דומה למישור.

*כבר כשרואים ש– $\left(L^i_j\right)$ אינה הפיכה אפשר כמובן לומר שהעקמומיות היא 0.

(ב) נשתמש במשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' + \Gamma^1_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \Gamma^2_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \end{cases}$$

מקדמי כריסטופל הם:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{18v^3}{1+9v^4}$$

והשאר מתאפסים. המשוואות הן:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(\alpha^2\right)'\left(\alpha^2\right)' = 0 \end{cases}$$

ואם נדבר בשפת u, v:

$$\begin{cases} (u)'' = 0 \\ (v)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(v'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

על L, $y = z = 0$, ולכן $v = 0$ והמשוואה השנייה אכן מתקיימת.
נותרנו עם:

$$u'' = 0$$

לכן $u(t) = at + b$. כלומר, העקומה הגיאודזית היא:

$$\alpha(t) = (at + b, 0, 0)$$

ואם ניקח למשל $a = 0, b = 1$ אכן נקבל את L.

4. פרמטריזציה של החרוט היא: $X(\theta, \phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, k\phi)$.
וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\phi = (\cos\theta, \sin\theta, k), X_\theta = (-\phi\sin\theta, \phi\cos\theta, 0)$$

ראינו בעבר שהנורמל הוא:

$$\frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k\cos\theta, k\sin\theta, -1)$$

וקטורי הנגזרות של הנורמל הם:

$$\vec{n}_\phi = 0 = 0 \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-k\sin\theta, k\cos\theta, 0) = \frac{k}{\phi\sqrt{1+k^2}} \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

לכן:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{k}{\phi\sqrt{1+k^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. נתבונן במשטח סיבוב הנתון על ידי הפרמטריזציה:

$$X(\theta,\phi)=(r(\phi)\cos\theta,r(\phi)\sin\theta,\phi)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta=(-r(\phi)\sin\theta,r(\phi)\cos\theta,0),X_\phi=(r'(\phi)\cos\theta,r'(\phi)\sin\theta,1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{\theta\theta}=(-r(\phi)\cos\theta,-r(\phi)\sin\theta,0),X_{\theta\phi}=(-r'(\phi)\sin\theta,r'(\phi)\cos\theta,0)$$

$$X_{\phi\phi}=(r''(\phi)\cos\theta,r''(\phi)\sin\theta,0)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta\times X_\phi=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -r(\phi)\sin\theta & r(\phi)\cos\theta & 0\\ r'(\phi)\cos\theta & r'(\phi)\sin\theta & 1\end{vmatrix}=(r(\phi)\cos\theta,r(\phi)\sin\theta,-r'(\phi)r(\phi))$$

ננרמל:

$$\|X_\theta\times X_\phi\|=\sqrt{r^2(\phi)\cos^2\theta+r^2(\phi)\sin^2\theta+(-r'(\phi)r(\phi))^2}=r(\phi)\sqrt{1+(r'(\phi))^2}$$

ובסך הכל:

$$\vec{n}=\frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|}=\frac{1}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}}(\cos\theta,\sin\theta,-r'(\phi))$$

לכן:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0\\ 0 & 1+(r'(\phi))^2\end{pmatrix}$$

כמו כן:

$$L_{11}=X_{\theta\theta}\cdot\vec{n}=-\frac{r(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}}$$

$$L_{12}=L_{21}=X_{\theta\phi}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=X_{\phi\phi}\cdot\vec{n}=\frac{r''(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}}$$

כלומר:

$$\left(L_{ij}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{r(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r''(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right)=-\left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(r'\left(\phi\right)\right)^2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{r(\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{r''(\phi)}{1+(r'(\phi))^2} \end{pmatrix}$$

כעת, אם המשטח מינימלי, $H=\frac{1}{2}tr\left(L^i_j\right)=0$, כלומר:

$$\frac{r''\left(\phi\right)}{1+\left(r'\left(\phi\right)\right)^2}=\frac{1}{r\left(\phi\right)}$$

אם $r'\left(\phi\right)=0$ נקבל ש: $r\left(\phi\right)\longrightarrow\infty$ ולכן זהו גליל עם רדיוס אינסופי, כלומר מישור (מישור xz).

אחרת, נכפיל את שני האגפים ב– $2r'\left(\phi\right)$ ונקבל:

$$\frac{2r'\left(\phi\right)r''\left(\phi\right)}{1+\left(r'\left(\phi\right)\right)^2}=\frac{2r'\left(\phi\right)}{r\left(\phi\right)}$$

כלומר:

$$\left(\ln\left(1+\left(r'\left(\phi\right)\right)^2\right)\right)'=2\left(\ln\left(r\left(\phi\right)\right)\right)'$$

נגזרות לוגריתמיות. נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$1+\left(r'\left(\phi\right)\right)^2=C^2r^2\left(\phi\right)$$

C^2 הוא קבוע האינטגרציה. אם כן:

$$\frac{dr}{d\phi}=r'\left(\phi\right)=\sqrt{C^2r^2\left(\phi\right)-1}$$

ולכן:

$$\frac{dr}{\sqrt{C^2r^2\left(\phi\right)-1}}=d\phi$$

נבצע החלפת משתנים: $p=Cr$ ונקבל:

$$\frac{dp}{C\sqrt{p^2-1}}=d\phi$$

שוב, נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$\int\frac{dp}{\sqrt{p^2-1}}=\int Cd\phi$$

כלומר:

$$arccoshp = C\phi + B$$

ולכן:

$$p = \cosh\left(C\phi + B\right)$$

ובסך הכל:

$$r\left(\phi\right) = \frac{1}{C}\cosh\left(C\phi + B\right)$$

וזהו אכן קטנואיד.

6. נתבונן במטריקות של הקטנואיד (פשוט; משטח סיבוב של $x = k\cosh\frac{z}{k}$ למשל):

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \cosh^2\frac{\phi}{k} & 0 \\ 0 & k^2\cosh^2\frac{\phi}{k} \end{pmatrix}$$

ושל ההליקואיד:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + \bar{k}^2 \end{pmatrix}$$

בצורה הבאה:

$$\cosh^2\frac{\phi}{k}d\theta^2 + k^2\cosh^2\frac{\phi}{k}d\phi^2, du^2 + \left(u^2 + \bar{k}^2\right)dv^2$$

אם נבצע החלפת משתנים: $u = k^2\sinh\frac{\phi}{k}, v = \theta$ וגם $\bar{k} = k$ נקבל את הדרוש, מכיוון שבמצב כזה:

$$u = k^2\sinh\frac{\phi}{k} \Longrightarrow du = \cosh\frac{\phi}{k}d\phi \Longrightarrow du^2 = \cosh^2\frac{\phi}{k}d\phi^2$$

וגם:

$$dv^2 = d\theta^2 = \frac{k^2\sinh^2\frac{\phi}{k}}{k^2\sinh^2\frac{\phi}{k}}d\theta^2 = \frac{k^2\sinh^2\frac{\phi}{k}}{\sqrt{k^4\sinh^4\frac{\phi}{k} + k^4}}d\theta^2$$

ולכן:

$$\left(u^2 + \bar{k}^2\right)dv^2 = k^2\cosh^2\frac{\phi}{k}d\theta^2$$

7. פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u\right)+g\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{u}=\left(1,0,f'\left(u\right)\right),X_{v}=\left(0,1,g'\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu}=\left(0,0,f''\left(u\right)\right),X_{uv}=\left(0,0,0\right),X_{vv}=\left(0,0,g''\left(v\right)\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_{u}\times X_{v}=\left|\begin{array}{ccc}
i & j & k\\
1 & 0 & f'\left(u\right)\\
0 & 1 & g'\left(v\right)
\end{array}\right|=\left(-f'\left(u\right),-g'\left(v\right),1\right)$$

ננרמל:

$$\left\Vert X_{u}\times X_{v}\right\Vert =\sqrt{1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_{u}\times X_{v}}{\left\Vert X_{u}\times X_{v}\right\Vert }=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}}}\left(-f'\left(u\right),-g'\left(v\right),1\right)$$

אם כן:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}
1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2} & f'\left(u\right)g'\left(v\right)\\
f'\left(u\right)g'\left(v\right) & 1+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}
\end{array}\right)$$

וגם:

$$\left(L_{ij}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}}}\left(\begin{array}{cc}
f''\left(u\right) & 0\\
0 & g''\left(v\right)
\end{array}\right)$$

נקבל:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=-\left(\begin{array}{cc}
\frac{f''(u)\left(1+\left(g'(v)\right)^{2}\right)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-f'(u)g'(v)g''(v)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{-g'(v)f'(u)f''(u)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{g''(v)\left(1+\left(f'(u)\right)^{2}\right)}{\left(1+(f'(u))^{2}+(g'(v))^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{array}\right)$$

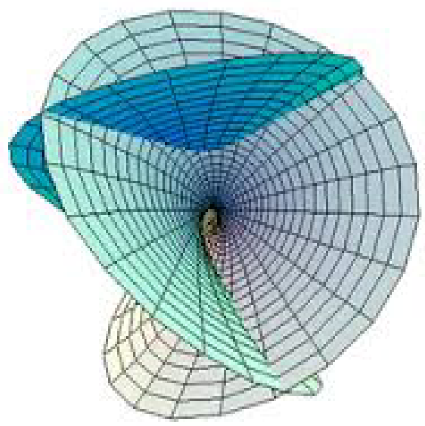
לפיכך:

$$K=\frac{f''\left(u\right)g''\left(v\right)}{\left(1+\left(f'\left(u\right)\right)^{2}+\left(g'\left(v\right)\right)^{2}\right)}$$

$$H=-\frac{g''(v)\left(1+(f'(u))^2\right)+f''(u)\left(1+(g'(v))^2\right)}{2\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)}$$

8. נראה שאכן $H=0$.

(א) המשטח נראה כך:



וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u=\left(1-u^2+v^2,2vu,2u\right),X_v=\left(2uv,1-v^2+u^2,-2v\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2vu & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix}=\left(1+u^2+v^2\right)\cdot\left(-2u,2v,\left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

ננרמל:

$$\|X_u\times X_v\|=\left(1+u^2+v^2\right)\cdot\sqrt{4u^2+4v^2+\left(1-u^2-v^2\right)^2}=\left(1+u^2+v^2\right)^2$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\frac{1}{(1+u^2+v^2)}\left(-2u,2v,\left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu}=(-2u,2v,-2),X_{uv}=(2v,2u,0),X_{vv}=(2u,-2v,-2)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11}=X_u\cdot X_u=\left(1+u^2+v^2\right)^2$$

$$g_{12}=g_{21}=X_u\cdot X_v=0$$

$$g_{22}=X_v\cdot X_v=\left(1+u^2+v^2\right)^2$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11}=X_{uu}\cdot\vec{n}=2$$

$$L_{12}=X_{21}=X_{uv}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=X_{vv}\cdot\vec{n}=-2$$

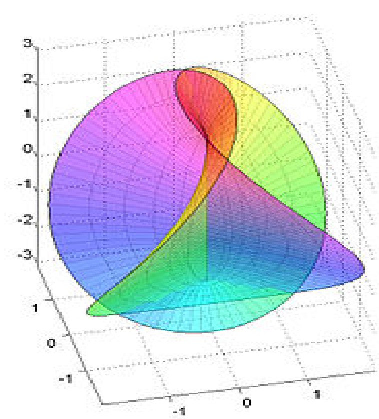
נזכור ש: $\left(L^i_j\right)=-\left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right)$, ולכן:

$$\left(L^i_j\right)=-\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0\\ 0 & -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H=\frac{1}{2}tr\left(L^i_j\right)=0$$

(ב) המשטח נראה כך:



בדקו שהפרמטריזציה איזותרמית.

נחשב את הלפלסיאן.

$$X_1\left(u,v\right)=2\cos v\sinh u-\frac{2}{3}\cos 3v\sinh 3u$$

מתקיים:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2}=2\cos v\sinh u-6\cos 3v\sinh 3u,\ \frac{\partial^2 X_1}{\partial v^2}=-2\cos v\sinh u+6\cos 3v\sinh 3u$$

ואכן $\Delta\left(X_1\right)=0$.

באופן דומה, עבור:

$$X_2\left(u,v\right)=2\sin v\sinh u-\frac{2}{3}\sin 3v\sinh 3u$$

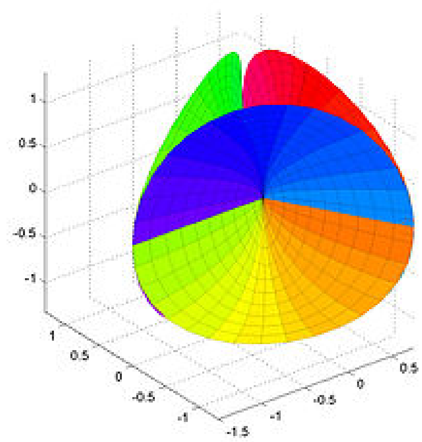
$$X_3\left(u,v\right)=2\cos 2v\cosh 2u$$

וקל לראות שאכן: $\Delta\left(X_2\right)=\Delta\left(X_3\right)=0$.

לכן $\Delta\left(X\right)=0$.

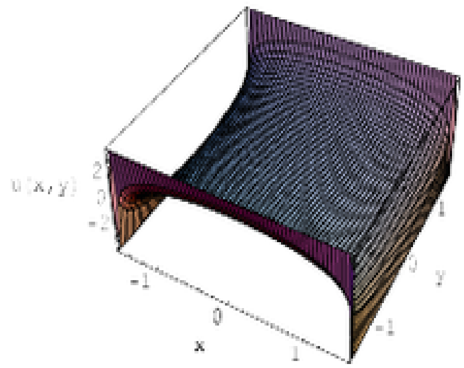
מכיוון שהקואורדינטות איזותרמיות, זה מספיק לכך שאכן $H=0$.

(ג) המשטח נראה כך:



לכו על זה.

(ד) המשטח נראה כך:



וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1, 0, -\tan u)\,, X_v = (0, 1, \tan v)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\tan u \\ 0 & 1 & \tan v \end{vmatrix} = (\tan u, -\tan v, 1)$$

ננרמל:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}}\,(\tan u, -\tan v, 1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = \left(0, 0, -\frac{1}{\cos^2 u}\right), X_{uv} = 0, X_{vv} = \left(0, 0, \frac{1}{\cos^2 v}\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = X_u \cdot X_u = 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_v = -\tan u \tan v$$

$$g_{22} = X_v \cdot X_v = 1 + \tan^2 v = \frac{1}{\cos^2 v}$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11}=X_{uu}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{\cos^2 u\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

$$L_{12}=L_{21}=X_{uv}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=X_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

כעת:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 u} & -\tan u\tan v\\ -\tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\left(g^{ij}\right)=\left(\frac{1-\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 v} & \tan u\tan v\\ \tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 u}\end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$\left(L^i_j\right)=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u} & 0\\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

נזכור ש: $\left(L^i_j\right)=-\left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right)$, כלומר:

$$\left(L^i_j\right)=\frac{\sin^2 u\sin^2 v-1}{\cos^2 u\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v} & \frac{\tan u\tan v}{\cos^2 v}\\ -\frac{\tan u\tan v}{\cos^2 u} & \frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H=\frac{1}{2}tr\left(L^i_j\right)=0$$

9. אנו יודעים שמתקיים היחס: $L_{ij}=-L^m_j g_{mi}$.
מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$L_{ij}=-L^m_j f^2\delta_{mi}=-f^2L^i_j$$

ואם כן:

$$L^1_1=-\frac{L_{11}}{f^2},L^2_2=-\frac{L_{22}}{f^2}$$

מכיוון ש: $H=\frac{L_1^1+L_2^2}{2}$, אפשר לכתוב:

$$H=-\frac{L_{11}+L_{22}}{2f^2}$$

כעת, $g_{12}=g_{21}=0$ כלומר $X_1\cdot X_2=0$. נגזור לפי המשתנה השני; לפי כלל לייבניץ:

$$X_{12}\cdot X_2+X_1\cdot X_{22}=0$$

כלומר $X_{12}\cdot X_2=-X_1\cdot X_{22}$.
כמו כן, מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$g_{11}=g_{22}=X_1\cdot X_1=X_2\cdot X_2=f^2$$

ואם נגזור את השוויון הזה לפי כלל לייבניץ, נקבל:

$$2\left(X_{11}\cdot x_1\right)=2\left(X_{12}\cdot x_2\right)$$

נציב $X_{12}\cdot X_2=-X_1\cdot X_{22}$, נחלק ב$-2$, נעביר אגף ונקבל:

$$X_{11}\cdot X_1+X_1\cdot X_{22}=0$$

כלומר:

$$X_1\cdot\left(X_{11}+X_{22}\right)=0$$

כלומר $\Delta\left(X\right)=X_{11}+X_{22}$ מאונך ל$-X_1$.
באופן דומה אפשר להראות ש$-X_{11}+X_{22}$ מאונך גם ל$-X_2$.
הוקטורים $\left\{X_1,X_2,\vec{n}\right\}$ פורשים את המרחב. $\vec{n}$ מאונך גם הוא ל$-X_1,X_2$ ולכן הוא פרופורציונלי ל$-X_{11}+X_{22}$:

$$\Delta\left(X\right)=c\vec{n}$$

עבור $c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו.
כעת:

$$c=\Delta\left(X\right)\cdot\vec{n}=\left(X_{11}+X_{22}\right)\cdot\vec{n}$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$X_{11}=\Gamma_{11}^1X_1+\Gamma_{11}^2X_2+L_{11}\vec{n},X_{22}=\Gamma_{22}^1X_1+\Gamma_{22}^2X_2+L_{22}\vec{n}$$

נציב זאת במשוואה, ומכיוון ש: $x_1\cdot\vec{n}=X_2\cdot\vec{n}=0$ וגם $\vec{n}\cdot\vec{n}=1$, נקבל מליניאריות המכפלה הפנימית:

$$c=\left(X_{11}+X_{22}\right)\cdot\vec{n}=L_{11}+L_{22}=-2Hf^2$$

ולכן:

$$\Delta\left(X\right)=c\vec{n}=-2Hf^{2}\vec{n}$$

כנדרש.

9 המשפט הראוי־לציון $(Theorema\ egregium)$ ואופרטור לפלס בלטרמי

9.1 מבוא

ראינו בעבר שבאופן מקומי, עקמומיות גאוס K מגדירה את צורתו של המשטח:

אם $K > 0$ הנקודה היא נקודה אליפטית (המשטח דומה לאליפסואיד בסביבת הנקודה).

אם $K < 0$ הנקודה היא נקודה היפרבולית (המשטח דומה לאוכף בסביבת הנקודה).

אם $K = 0$ הנקודה היא נקודה פרבולית (המשטח דומה למישור/גליל בסביבת הנקודה).

אם כן, עקמומיות גאוס בנקודה תלויה בצורתו הגיאומטרית של המשטח בלבד.

צורתו הגיאומטרית של המשטח אין לה שיג ושיח עם האלגברה, ובפרט עם הפרמטריזציה של המשטח.

כלומר, עקמומיות גאוס ־ ליתר דיוק, הסימן שלה ־ לא תלוי כלל בפרמטריזציה שאנו בוחרים למשטח.

מאידך גיסא, חישבנו את עקמומיות גאוס באמצעות הנוסחה:

$$K = \det\left(L^i_j\right)$$

ובנוסחה זו יש תלות רבה בפרמטריזציה ־ בין אם בוחרים לחשב את $\left(L^i_j\right)$ באמצעות וקטורי הנגזרות השניות ובין אם באמצעות וקטורי הנגזרות של הנורמל.

אם כך, האם העקמומיות K היא **תכונה פנימית**, כלומר תלויה במטריקה בלבד, או שמא היא **תכונה חיצונית**, התלויה בפרמטריזציה?

יש לכך השלכות גם לחישובים פרקטיים בסיסיים ־ לעיתים, נתונה המטריקה של המשטח בלבד, ללא הפרמטריזציה (כמו במישור ההיפרבולי).

אם אכן K היא פנימית, נוכל גם במקרים כאלו לחשב אותה. אם היא חיצונית, לא נוכל לעשות זאת.

אז מה התשובה?

9.2 $Theorema\ Egregium$

משפט 9.1 המשפט המפתיע: K היא תכונה פנימית.

כשגאוס ניסח את המשפט לראשונה, הוא כינה אותו בלטינית $Theorema\ Egregium$, **המשפט המפתיע או המשפט הראוי לציון.**

כך הוא כותב (תרגום חופשי מלטינית):

"אם כן, הנוסחה המופיעה במאמר הקודם מובילה למשפט ראוי לציון. אם משטח מעוקם נוצר ממשטח אחר, מידת העקמומיות של המשטח בכל נקודה נותרת זהה".

במילים אחרות, אם משטח א' מתקבל ממשטח ב' על ידי איזומטריה מקומית (מותר לגלגל, למעוך ולקפל, אסור למתוח, לכווץ ולקרוע), בכל נקודה יש להם את אותה העקמומיות.

דוגמה נחמדה היא ההליקואיד והקטנואיד ־ שניהם, באופן מקומי, איזומטריים (ראו תרגיל שמראה שעל ידי החלפת קואורדינטות אפשר להראות שהמטריקות שלהם זהות).

לשון אחר, "K תכונה פנימית" פירושו שאפשר לחשב את K באמצעות מדידות (של מרחקים וזוויות) על המשטח עצמו, ללא קשר לצורה בה הוא משוכן בתוך המרחב $\mathbb{R}^3$.

המשפט מאד מפתיע ומאד ראוי לציון מכיוון שהחישוב של עקמומיות גאוס דורש שימוש בפרמטריזציה, באופן בו המשטח משוכן במרחב, כפי שציינו.

למה הדבר דומה? למשפט שיוכיח שאת כל המילים בעברית אפשר לבטא רק עם האותיות ח' ור' (בדקו האם זה אפשרי).

מפתיע, הלא כן?

הנוסחה עליה מדבר גאוס היא הנוסחה לחישוב K מתוך המטריקה בלבד.

משפט 9.2 את עקמומיות גאוס אפשר להביע באופן הבא:

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left(\left(L^1_1 g_{11} - L^2_1 g_{21}\right) L^2_2 - \left(L^1_2 g_{11} - L^2_2 g_{21}\right) L^2_1\right)$$

לאחר עבודה מקבלים את הנוסחה הבאה:

$$K = g^{11}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \left(\Gamma^2_{12}\right)^2\right)$$

את מקדמי כריסטופל אפשר לחשב מתוך המטריקה:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right)$$

ואם כן את K אפשר לחשב בעזרת המטריקה בלבד.

תרגיל:

חשבו את עקמומיות גאוס של המישור ההיפרבולי, חצי המישור העליון עם המטריקה:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

מכיוון שלא נתונה לנו הפרמטריזציה של המשטח אלא המטריקה בלבד, נשתמש במשפט המפתיע.

מקדמי כריסטופל של המשטח הם:

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0\\ \Gamma_{12}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\ldots\right)=-\frac{1}{y}\\ \Gamma_{21}^{1}=-\frac{1}{y}\\ \Gamma_{22}^{1}=0\\ \Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{y}\\ \Gamma_{12}^{2}=0\\ \Gamma_{21}^{2}=0\\ \Gamma_{22}^{2}=-\frac{1}{y}\end{gathered}$$

ולכן לפי המשפט המפתיע:

$$K=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11,2}^{2}-\Gamma_{12,1}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right)$$

אצלנו:

$$K=y^{2}\cdot\left(-\frac{1}{y^{2}}-0-\frac{1}{y^{2}}+0+\frac{1}{y^{2}}+0\right)=-1$$

9.3 תכונות פנימיות VS תכונות חיצוניות

נגדיר באופן מעט יותר פורמלי מהי תכונה פנימית.

הגדרה 9.3 יהיו M_1, M_2 שני משטחים.

פונקציה $f: M_1 \to M_2$ נקראת **איזומטריה**, אם f שומרת על אורכי עקומות, חח"ע, על וחלקה.

אם קיימת f כזו, המשטחים M_1, M_2 נקראים **איזומטריים**.

הערה 9.4 אפשר באופן כללי להגדיר איזומטריה בין שני מרחבים מטריים:

$f:(M_1,d_1)\to(M_2,d_2)$ נקראת **איזומטריה מקומית** אם לכל $x,y\in M_1$, מתקיים:

$$d_1\left(x,y\right)=d_2\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)$$

אני מניח שאתם יודעים מהו מרחב מטרי.

f היא איזומטריה אם בין משטחים אם היא איזומטריה מקומית ודיפאומורפיזם (חח"ע, על וחלקה).

לדוגמה:

ראינו שעקומה מישורית (בתחום $(0,2\pi)\times\mathbb{R}$) שומרת על אורכה לאחר שנגלגל את המישור לגליל, ולכן המישור והגליל איזומטריים.

משפט 9.5 משטחים הם איזומטריים אם ורק אם קיימות פרמטריזציות של המשטחים בהן המטריקות שוות.

מסקנה 9.6 תכונות פנימיות (ובהן עקמומיות גאוס) אכן תלויות במטריקה בלבד.

לדוגמה:

תכונות פנימיות למשל הן אורך של עקומה על המשטח, זוויות בין עקומות, שטח המשטח והמסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות (עקומות גיאודזיות).

תכונות חיצוניות למשל הן עקמומיות של עקומות על המשטח, הנורמל למשטח, עקמומיות ממוצעת ואופרטור הצורה.

הערה 9.7 זווית בין עקומות היא הזווית בין המשיקים לעקומות בנקודות החיתוך.

המשיקים לעקומות β,δ הם β',δ' ולכן אפשר לחשב את הזווית בין העקומות θ באופן הבא:

$$\cos\theta=\frac{\beta'\cdot\delta'}{\|\beta'\|\cdot\|\delta'\|}$$

9.4 שימושים מחיי היום־יום למשפט הראוי־לציון

אם נזכור ש:

$$K=k_1\cdot k_2$$

נוכל לקבל תוצאה מעניינת מהמשפט.

אכלתם פעם פיצה? (ברור שאכלתם, רואים).

עת משולש פיצה מונח במגש, הוא מישורי, ולכן עקמומיות גאוס שלו היא 0 (אפשר לחשוב גם על דף).

כדי לאכול את משולש פיצה, יש להרים אותו מהמגש (או שלא; תפתיעו אותי).

איך מרימים משולש פיצה?

אם מרימים אותו מהחלק הקשה, החלק הרך נופל, מידלדל כלפי מטה. העיוות הזה של המשולש, שנוצר על ידי כוח הכבידה, הוא איזומטריה מקומית (הרי לא קרענו את המשולש, לא מתחנו ולא כיווצנו) ולכן על העקמומיות K להישאר 0. היא אכן נשארת 0, מכיוון

שעקומה גיאודזית שנמצאת בחלק הקשה היא קו ישר, ולכן עקמומיותה היא 0. זה אומר שאחת מהעקמומיות הראשיות היא 0, ולכן גם עקמומיות גאוס K היא 0.

עד כאן הכל טוב ויפה. עם זאת, קשה לשלוט בדברים מידלדלים שכאלה, ועוד יותר קשה לאכול אותם. מה רובנו עושים כדי להתגבר על הבעיה? אנו מקפלים את החלק הקשה. ברגע שנקפל את החלק הקשה, המשולש כבר לא יפול אלא יתקשח.

למה?

קיפול של החלק הקשה גם הוא איזומטריה מקומית, ולכן במשולש המקופל עקמומיות גאוס צריכה להישאר 0, כלומר אחת מהעקמומיות הראשיות צריכה להיות 0. ברגע שקיפלנו את החלק הקשה של המשולש, שינינו את העקמומיות הראשית שהתאימה לעקומות גיאודזיות שעברו בחלק הקשה, הפכנו אותו מקווים ישרים לקווים עקומים, ולכן העקמומיות הראשית שהתאפסה לפני הקיפול כבר אינה מתאפסת.

לכן, על העקמומיות הראשית השנייה להתאפס (כדי שבסך הכל $K = 0$). כלומר, על עקומות גיאודזיות בכיוון אחר (וביתר פירוט, בכיוון המאונך לכיוון של החלק הקשה, כלומר החלק הרך שהידלדל) להיות קווים ישרים, ולכן החלק הרך מתקשח, כך שהעקומות הגיאודזיות היוצאות מהחלק הקשה (הנקודה בה האגודל מקפל את הפיצה) במאונך לחלק הקשה הן אכן קווים ישרים.

כך, חוקי הפיזיקה והטבע מצייתים לגאוס ומקשיחים את המשולש, כדי לשמור על $K = 0$.

הערה 9.8 שיטה זו להחזיק פיצה נקראת באנגלית $hold\&fold$, "החזק וקפל" (איכשהו באנגלית הכל מתחרז).

אפשר לקבל מהמשפט גם מסקנות שליליות חשובות.

למשל, אם למשטחים יש עקמומיות גאוס עם סימנים שונים, אין פרמטריזציות שבהן המטריקות תהיינה זהות (או אם עקמומיות אחת קבועה והשנייה לא ועל זו הדרך).

<u>תרגיל:</u>

נתבונן בשלושה משטחים - ספירה, גליל ואוכף: $z = x^2 - y^2$.

הראו שלא קיימות פרמטריזציות של המשטחים בהן המטריקות של כל זוג משטחים זהות.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הספירה שלנו היא למשל:

$$X(\theta, \phi) = (R\cos\theta\cos\phi, R\sin\theta\cos\phi, R\sin\phi)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = R \cdot (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0)$$

$$X_\phi = R \cdot (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta \times X_\phi = R^2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \cdot \left(\cos^2\phi\cos\theta, \cos^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = R^2 \cdot \sqrt{\cos^4\phi\cos^2\theta + \cos^4\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\cos\phi$$

ננרמל ונקבל:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$$

נחשב את וקטורי הנגזרות של הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\cos\phi\sin\theta, \cos\phi\cos\theta, 0) = \frac{1}{R} \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi) = 0 \cdot X_\theta + \frac{1}{R} \cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = \frac{1}{R^2}$$

הערה 9.9 הנורמל הוא בעצמו פרמטריזציה של ספירה (שרדיוסה הוא 1). חשבו למה.

כמו כן, אפשר להבין למה העקמומיות היא $\frac{1}{R^2}$ אם מתבוננים בה מהזווית הגיאומטרית הבאה.

עקמומיות גאוס היא המכפלה של העקמומיות הראשיות. העקמומיות הראשיות הן עקמומיות של עקומות גיאודזיות שעוברות בנקודה. בכל נקודה על הספירה, העקומות הגיאודזיות הן מעגלים גדולים, כפי שראינו. מעגלים גדולים הם מעגלים על הספירה עם אותו רדיוס - R (המרכז שלהם הוא המרכז של הספירה). מה העקמומיות של מעגל שרדיוסו R? $\frac{1}{R}$, כפי שהבנו בפרק על עקמומיות של עקומות. אלו הן כל העקומות הגיאודזיות, בכל נקודה על הספירה, ולכן בכל נקודה עקמומיות גאוס תהיה המכפלה $\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R}=\frac{1}{R^2}$.

פרמטריזציה של הגליל היא:

$$X(\theta,\phi) = (b\cos\theta, b\sin\theta, \phi)$$

ראינו שכל מקדמי כריסטופל במצב זה מתאפסים (ולכן הגיאודזים הם קווים ישרים).
לכן, אם נשתמש במשפט המפתיע, נקבל:

$$K = 0$$

האוכף שלנו הוא פרבולואיד היפרבולי. פרמטריזציה שלו היא, למשל:

$$X(u,v) = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1,0,2u)\,, X_v = (0,1,-2v)$$

נחשב את מקדמי המטריקה:

$$g_{11} = X_u \cdot X_u = 1 + 4u^2$$

$$g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_v = -4uv$$

$$g_{22} = X_v \cdot X_v = 1 + 4v^2$$

ולכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-2u, 2v, 1)$$

הנורמה היא:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} (-2u, 2v, 1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = (0,0,2)\,, X_{uv} = \vec{0}, X_{vv} = (0,0,-2)$$

ולכן:

$$L_{11} = X_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$L_{12} = L_{21} = X_{uv} \cdot \vec{n} = 0$$

$$L_{22} = X_{vv} \cdot \vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

לפיכך, התבנית היסודית השנייה היא:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \end{pmatrix}$$

כעת:

$$\det(L_{ij}) = -\frac{4}{1+4u^2+4v^2}$$

$$\det(L_{ij}) = \left(1+4u^2\right)\left(1+4v^2\right) - 16u^2v^2 = 1+4u^2+4v^2$$

ובסך הכל:

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = -\frac{4}{\left(1+4u^2+4v^2\right)^2}$$

כעת, העקמומיות של הספירה תמיד חיובית, של הגליל תמיד אפס ושל האוכף תמיד שלילית, ולכן לפי מה שהסברנו אין פרמטריזציות של המשטחים האלו בהן המטריקות זהות.

זכרו שבדומה לגליל, עקמומיות גאוס של המישור היא $K = 0$.

מכאן, אפשר להסיק מסקנה חשובה מאד מבחינה קרטוגרפית:

מסקנה 9.10 לא קיימת הטלה קרטוגרפית (קרי, מפה) מישורית מושלמת של כדור הארץ.

במילים אחרות, כל מפה מישורית של כדור הארץ (ואפילו של חתיכה קטנה ממנו) תעוות במקצת את המרחקים או הזוויות שעל הכדור.

המפה המישורית המקובלת כיום של כדור הארץ כמישור היא היטל מרקטור, שבה הזוויות נשמרות אך לא המרחקים:

כמו שראינו כשדיברנו על הגיאודזים, ככל שמתקרבים לקטבים העיוות במרחקים גדול יותר.

9.5 אופרטור לפלס־בלטרמי

הגדרה 9.11 תהי X פרמטריזציה הנתונה בקואורדינטות איזותרמיות:

$$(g)_{ij} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אופרטור לפלס־בלטרמי מוגדר על ידי:

$$\Delta_{LB}\left(f\right) = \frac{1}{\lambda}\Delta f$$

כלומר, הלפלסיאן כפול ההופכי של λ.

משפט 9.12 יהי M משטח עם פרמטריזציה איזותרמית:

$$(g)_{ij} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי, עקמומיות גאוס ניתנת לחישוב על ידי הנוסחה:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\lambda\right)$$

<u>תרגיל:</u>

א. חשבו את עקמומיות גאוס של המישור ההיפרבולי באמצעות אופרטור לפלס־בלטרמי.

<u>פתרון:</u>

אצלנו, $\lambda = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$. לכן:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\lambda\right) = \Delta_{LB}\left(\ln y\right) = \frac{1}{\lambda}\Delta\left(\ln y\right) =$$

כעת, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ולכן:

$$= y^2 \cdot \left(\frac{\partial^2\left(\ln y\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\ln y\right)}{\partial y^2}\right) = y^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -1$$

וזו אכן עקמומיות גאוס, כמו שראינו בתרגיל קודם.

ב. חשבו את עקמומיות גאוס של הספירה באמצעות אופרטור לפלס־בלטרמי.

<u>פתרון:</u>

אנו צריכים פרמטריזציה איזותרמית של הספירה.

כפי שראינו, הפונקציה ההפוכה להטלה הסטריאוגרפית היא פרמטריזציה איזותרמית של הספירה, עם המטריקה:

$$\left(g_{ij}\right) = \frac{1}{\left(1+u^2+v^2\right)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

במקרה זה, $\lambda = \frac{1}{\left(1+u^2+v^2\right)^2}$. לכן:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\lambda\right) = \Delta_{LB}\left(\ln\left(1+u^2+v^2\right)\right) = \frac{1}{\lambda}\Delta\left(\ln\left(1+u^2+v^2\right)\right)$$

כעת, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$, ולכן:

$$\Delta\left(\ln\left(1+u^2+v^2\right)\right) = \frac{2\left(1+u^2+v^2\right) - 2u\cdot 2u}{\left(1+u^2+v^2\right)^2} + \frac{2\left(1+u^2+v^2\right) - 2v\cdot 2v}{\left(1+u^2+v^2\right)^2}$$

כלומר:

$$\Delta\left(\ln\left(1+u^2+v^2\right)\right) = \frac{4}{\left(\left(1+u^2+v^2\right)^2\right)}$$

ובסך הכל:

$$K = \left(1+u^2+v^2\right)^2 \cdot \frac{4}{\left(\left(1+u^2+v^2\right)^2\right)} = 4$$

שימו לב שהסימן אכן חיובי.

מסקנה 9.13 יש לנו ארבע שיטות שונות לחשב את עקמומיות גאוס.

כמו שאנו יודעים, ארבע השיטות הן:

1. $K = \det\left(L^i_j\right)$.
2. $K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}$.
   למה אנו מתייחסים אליהן כאל שתי שיטות שונות? כי את $\left(L^i_j\right)$ אפשר לחשב בשתי דרכים שונות (ישירות או בעזרת התבניות היסודיות הראשונה והשנייה).
3. המשפט המפתיע.
4. אופרטור לפלס־בלטרמי. בשיטה זו אפשר להשתמש רק אם הקואורדינטות איזותרמיות.

9.6 משטחים בעלי עקמומיות גאוס קבועה

אנו יודעים שעקמומיות גאוס מגדירה באופן מקומי את צורת המשטח ־ כאליפסואיד, מישור/גליל או היפרבולואיד.

עם זאת, מדובר על תיאור מקומי בלבד. העקמומיות יכולה להשתנות, וכך גם הצורה.

אם כן, במשטחים בעלי עקמומיות גאוס קבועה נוכל לטעון טענות גלובאליות, על צורתו של המשטח כולו (ולא רק מבחינה מקומית).

ראינו שעקמומיות גאוס של המישור והגליל היא $K = 0$ בכל נקודה (ואכן צורתם זהה בכל נקודה).

כמו כן, ראינו שעקמומיות גאוס של ספירה שרדיוסה הוא R היא $K = \frac{1}{R^2}$.

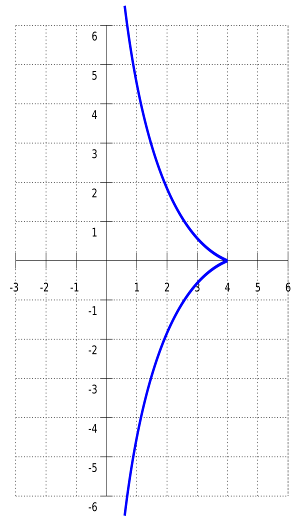
אם כן, עבור כל מספר ממשי $a \geq 0$ אנו מכירים משטח שעקמומיות גאוס שלו היא $K = a$ בכל נקודה.

למשל, אם נרצה משטח שעקמומיות גאוס שלו בכל נקודה היא $K = \sqrt{8}$, נתבונן בספירה שרדיוסה הוא $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

נשאלת השאלה: האם גם עבור מספרים $a < 0$ קיימים משטחים שעקמומיות גאוס שלהם היא $K = a$ בכל נקודה?

נתשבת התשובה: כן, כפי שנראה מיד.

ראשית, נתבונן בעקומת טרקטריקס ($tractrix$) במישור xz, כמו זו למשל:



הטרקטריקס (במישור xz) מוגדרת על ידי הפרמטריזציה:

$$\beta\left(\phi\right)=R\cdot\left(\frac{1}{\cosh\phi},0,\phi-\tanh\phi\right)$$

או:

$$\delta\left(\phi\right)=R\cdot\left(\sin\phi,0,\cos\phi+\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)$$

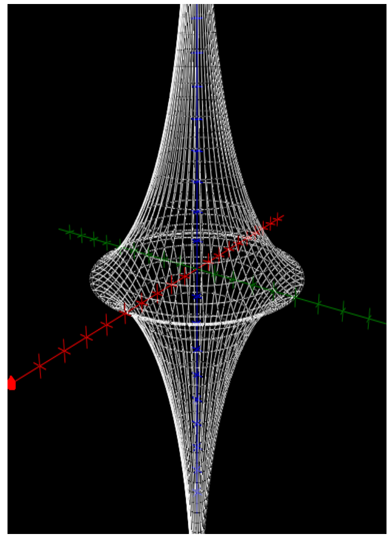
השוני הוא בתחום של ϕ (חשבו מה הוא בכל אחד מהמקרים).
נסובב את העקומה סביב ציר ה־z:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\frac{R\cos\theta}{\cosh\phi},\frac{R\sin\theta}{\cosh\phi},R\left(\phi-\tanh\phi\right)\right)$$

או:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(R\cos\theta\sin\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\left(\cos\phi+\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)$$

ונקבל טרקטריקואיד ($tracricoid$):



משטח זה מכונה גם **פסואודוספירה**.

בדומה לספירה עם רדיוס R, גם לפסואודוספירה עם רדיוס R יש עקמומיות גאוס קבועה בכל נקודה:

$$K = -\frac{1}{R^2}$$

והיא אכן שלילית, ולכל מספר שלילי $a < 0$ אפשר למצוא פסואודוספירה שעקמומיות גאוס שלה היא $K = a$.

את ההוכחה לכך שזו היא אכן עקמומיות גאוס של הפסואודוספירה תמצאו בתרגילים הנוספים.

הערה 9.14 שימו לב שהטרקטריקס לא רגולרית בנקודת החיתוך עם ציר ה$x-$. לכן הפסואודוספירה אינה רגולרית במישור xy.

תרגילים נוספים

1. (שאלה ממבחן) יהי $\rho > 0$ מספר ממשי. תהי:

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^{-1}$$

ונתבונן במטריקה $f^2(x,y)\left(dx^2+dy^2\right)$ במישור (x,y).
חשבו את עקמומיות גאוס של המטריקה $f^2(x,y)\left(dx^2+dy^2\right)$.

2. בעזרת אופרטור לפלס־בלטרמי, חשבו את עקמומיות גאוס של הקטנואיד שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\beta(\phi) = (\cosh\phi, 0, \phi)$$

3. הוכיחו שעקמומיות גאוס של המשטחים הבאים היא $K = -\frac{1}{R^2}$.
   (א) $\left(\frac{R\cos\theta}{\cosh\phi}, \frac{R\sin\theta}{\cosh\phi}, R(\phi - \tanh\phi)\right)$.
   (ב) $\left(R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\left(\cos\phi + \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)$.

4. הראו שהעקמומיות הממוצעת H היא תכונה חיצונית, בעזרת שני משטחים עם מטריקות זהות אך H שונה.

5. תהיינה $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ איזומטריות, כאשר המטריקה על $\mathbb{R}^3$ היא המטריקה הסטנדרטית:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2}$$

האם הפונקציות הבאות הן איזומטריות?
   (א) $h = f + g$.
   (ב) $h = f \times g$.
   (ג) $h = f \circ g$.
   (ד) $h = c \cdot f$, כאשר $c \in \mathbb{R}$.

6. (שאלה ממבחן) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
יהיו M_1, M_2 שני משטחים ב־$\mathbb{R}^3$ כך שעקמומיות גאוס שלהם קבועה ושווה. אזי קיימת איזומטריה בין M_1 לבין M_2.

פתרונות

1. נשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי.

אצלנו: $\lambda=\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^{-2}$. לכן:

$$K=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^{-2}\right)=\Delta_{LB}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\lambda}\Delta\left(\ln y\right)=\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=$$

נחשב את הלפלסיאן:

$$\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=\frac{4\rho\left(4+\rho x^2+\rho y^2\right)-4\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(4+\rho x^2+\rho y^2\right)^2}$$

כלומר:

$$\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=\frac{\rho}{\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2}$$

ולכן:

$$K=\rho$$

2. המשטח הוא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\cosh\phi\cos\theta,\cosh\phi\sin\theta,\phi\right)$$

כמו שראינו בעבר, המטריקה נתונה על ידי:

$$\left(g_{ij}\right)=\cosh^2\phi\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

לפיכך הקואורדינטות אכן איזותרמיות, כאשר $\lambda=\cosh^2\phi$. לכן:

$$K=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\left(\cosh^2\phi\right)\right)=-\frac{1}{\cosh^2\phi}\Delta\left(\ln\left(\cosh\phi\right)\right)$$

נגזור פעמיים לפי ϕ:

$$\ln\left(\cosh\phi\right)\Longrightarrow\frac{\sinh\phi}{\cosh\phi}=\tanh\phi\Longrightarrow\frac{1}{\cosh^2\phi}$$

הנגזרת פעמיים לפי θ מתאפסת ולכן: $\Delta\left(\ln\left(\cosh\phi\right)\right)=\frac{1}{\cosh^2\phi}$, ובסך הכל:

$$K=-\frac{1}{\cosh^2\phi}\cdot\frac{1}{\cosh^2\phi}=-\frac{1}{\cosh^4\phi}$$

3. זו הפסואודוספירה שלנו.

(א) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = R\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\cosh\phi},\frac{\cos\theta}{\cosh\phi},0\right)$$

$$X_\phi = R\cdot\left(-\frac{\cos\theta\tanh\phi}{\cosh\phi},-\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi},\tanh^2\phi\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta\times X_\phi = R^2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sin\theta}{\cosh\phi} & \frac{\cos\theta}{\cosh\phi} & 0 \\ -\frac{\cos\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & -\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & \tanh^2\phi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\cdot\left(\frac{\cos\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi},\frac{\sin\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi},\frac{\tanh\phi}{\cosh^2\phi}\right)$$

הנורמה היא:

$$\|X_\theta\times X_\phi\| = R^2\sqrt{\frac{\cos^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi}+\frac{\sin^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi}+\frac{\tanh^2\phi}{\cosh^4\phi}} =$$

$$= \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}\sqrt{\tanh^2\phi+\frac{1}{\cosh^2\phi}} = \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|} = \left(\cos\theta\tanh\phi,\sin\theta\tanh\phi,\frac{1}{\cosh\phi}\right)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\tanh\phi,\cos\theta\tanh\phi,0) = \frac{\sinh\phi}{R}\cdot X_\theta + 0\cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = \left(\frac{\cos\theta}{\cosh^2\phi},\frac{\sin\theta}{\cosh^2\phi},-\frac{\tanh\phi}{\cosh\phi}\right) = 0\cdot X_\theta - \frac{1}{R\sinh\phi}\cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R\sinh\phi} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = -\frac{1}{R^2}$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם: $\left(R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\left(\cos\phi+\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)$

$$X_\theta = R\cdot(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0)$$

$$X_\phi = R\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi+\frac{1}{\sin\phi}\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta\times X_\phi = R^2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\cdot\left(\cos\theta\cos^2\phi, \sin\theta\cos^2\phi, -\sin\phi\cos\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\|X_\theta\times X_\phi\| = R^2\sqrt{\cos^2\theta\cos^4\phi+\sin^2\theta\cos^4\phi+\sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\cos\phi$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) = \frac{\cot\phi}{R}\cdot X_\theta + 0\cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi) = 0\cdot X_\theta - \frac{\tan\phi}{R}\cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\cot\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\phi}{R} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = -\frac{1}{R^2}$$

4. נתבונן במישור:

$$X(u,v) = (u,v,0)$$

ובגליל:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\theta,\sin\theta,\phi\right)$$

אנו יודעים שהמטריקות של שני המשטחים זהות:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\end{array}\right)$$

ולכן התכונות הפנימיות זהות.
מצד שני, אנו יודעים שהעקמומיות הממוצעת של המישור היא $H=0$.
וקטורי הנגזרות של הגליל הם:

$$X_{\theta}=\left(-\sin\theta,\cos\phi,0\right),X_{\phi}=\left(0,0,1\right)$$

הנורמל הוא

$$X_{\theta}\times X_{\phi}=\left|\begin{array}{ccc}i & j & k\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right|=\left(\cos\theta,\sin\theta,0\right)$$

הנורמה היא 1, ולכן: $\vec{n}=\left(\cos\theta,\sin\theta,0\right)$. נגזור:

$$\vec{n}_{\theta}=\left(-\sin\theta,\cos\theta,0\right)=1\cdot X_{\theta}+0\cdot X_{\phi}$$

$$\vec{n}_{\phi}=\left(0,0,0\right)=0\cdot X_{\theta}+0\cdot X_{\phi}$$

כלומר:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 0\end{array}\right)$$

ולכן:

$$H=\frac{1}{2}tr\left(L_{j}^{i}\right)=\frac{1}{2}$$

ואם כן העקמומיות H אכן שונה בכל אחד מהמשטחים, ולכן זו אינה תכונה פנימית.

5. נזכור שבהינתן שני מרחבים מטריים, $\left(X,d_{X}\right),\left(Y,d_{Y}\right)$, פונקציה $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה אם לכל $u,v\in X$:

$$d_{X}\left(u,v\right)=d_{Y}f\left(\left(u\right),f\left(v\right)\right)$$

(א) לא בהכרח. נסתכל, למשל, על: $f(x)=g(x)=x$.
ברור שאלו איזומטריות, ומתקיים: $h(x)=2x$, שאינה איזומטריה, למשל:

$$1=d(0,e_1)\neq d(h(0),h(e_1))=d(0,2e_1)=2$$

(ב) לא. נשתמש באותן פונקציות מהסעיף הקודם. נקבל:

$$h=f\times g=f\times f=0$$

$f\times f$ היא דטרמיננטה עם שתי שורות זהות ולכן מתאפסת.
פונקציית האפס היא כמובן לא איזומטריה.

(ג) כן. נראה זאת:

$$d(h(u),h(v))=d(f(g(u)),f(g(v)))=d(g(u),g(v))=d(u,v)$$

המעבר השני נובע מכך ש$-f$ איזומטריה, והמעבר האחרון נובע מכך ש$-g$ איזומטריה.

(ד) נבדוק:

$$d(h(u),h(v))=d(cf(u),cf(v))=|c|\cdot d(u,v)$$

ולכן h איזומטריה אם ורק אם $|c|=1$.

6. נפריך את הטענה.
נתבונן בשני המשטחים:

$$M_1=X(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$$

$$M_2=X(\theta,\phi)=(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,\ln\phi)$$

M_1 הוא הליקואיד ו$-M_2$ הוא משטח הסיבוב של העקומה $z=\ln x$.
אפשר להסתכל בפשטות, ולראות שאין החלפת קואורדינטות באחד מהמשטחים כך שנקבל את אותן המטריקות (כי שתי הקואורדינטות של הפרמטריזציות זהות אך השלישית שונה).
נמצא עקומה מישורית שלעקומות המרחביות המתאימות לה על המשטחים יש אורכים שונים.
חישבנו בעבר את עקמומיות גאוס של ההליקואיד; התבניות היסודיות הן:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+u^2\end{pmatrix},(L_{ij})=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\\-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}&0\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K=\frac{\det\left(L_{ij}\right)}{\det\left(g_{ij}\right)}=-\frac{1}{\left(1+u^{2}\right)^{2}}$$

נחשב את עקמומיות גאוס של M_2.

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{\phi}=\left(\cos\theta,\sin\theta,\frac{1}{\phi}\right),X_{\theta}=\left(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$-X_{\theta}\times X_{\phi}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{1}{\phi}\\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\left(-\cos\theta,-\sin\theta,\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert =\sqrt{\cos^{2}v\theta+\sin^{2}\theta+\phi^{2}}=\sqrt{\phi^{2}+1}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_{\theta}\times X_{\phi}}{\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert }=\frac{1}{\sqrt{\phi^{2}+1}}\left(\cos\theta,\sin\theta,-\phi\right)$$

וקטורי הנגזרות של הנורמל הם:

$$\vec{n}_{\phi}=\frac{1}{\left(\phi^{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,1\right)=0\cdot X_{\theta}+\frac{\phi}{\left(\phi^{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot X_{\phi}$$

$$\vec{n}_{\theta}=\frac{1}{\sqrt{\phi^{2}+1}}\left(-\sin\theta,\cos\theta,u\right)=\frac{1}{\phi\sqrt{\phi^{2}+1}}\cdot X_{\theta}+0\cdot X_{\phi}$$

לכן:

$$\left(L_{j}^{i}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{\phi}{\left(\phi^{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{1}{\phi\sqrt{\phi^{2}+1}} & 0\end{pmatrix}$$

ואכן:

$$K=\det\left(L_{j}^{i}\right)=-\frac{1}{\left(1+\phi^{2}\right)^{2}}$$

אם כן, עקמומיות גאוס של שני המשטחים זהה.

אף על פי כן, המשטחים אינם איזומטריים. למשל, נתבונן בעקומה:

$$\alpha\left(t\right)=\left(t,t\right)$$

כאשר $t \in \left[\frac{1}{10^{10}}, 2\pi\right]$, ונתבונן בעקומה $\beta = X \circ \alpha$ בכל אחד מהמקרים.
המטריקה של M_2 היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$L(\beta) = \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{(\alpha')^{\,t}\,(g_{ij})\,(\alpha)\,(\alpha')}dt = \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}dt \approx 22.4299$$

על ההליקואיד M_1, ועל M_2:

$$L(\beta) = \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{(\alpha')^{\,t}\,(g_{ij})\,(\alpha)\,(\alpha')}dt = \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2} + t^2}dt \approx 43.645$$

והאורכים בוודאי לא שווים.

*אם לוקחים $t = 0$ האינטגרל השני כלל לא מתכנס.

10 גאוס־בונה על קצה המזלג

10.1 עקמומיות נורמלית ועקמומיות גיאודזית

יהי M משטח, ותהי $\beta = r \circ \alpha$ עקומה על המשטח.

אנו יודעים שהוקטור β' הוא וקטור המשיק, והוא מתאר את כיוון ההתקדמות של העקומה β.

כמו כן, הוקטור β'' מתאר את קצב השינוי של העקומה β; אם העקומה β נתונה במהירות יחידה, הוקטור β'' מגדיר את העקמומיות של β על ידי:

$$k = \|\beta''\|$$

הוקטורים β', β'' מאונכים זה לזה.

הנורמל למשטח $\vec{n}$ מאונך לוקטור β', ולכן ביחד עם הוקטור $\beta' \times \vec{n}$ נקבל בסיס ל־$\mathbb{R}^3$.

אם נזכור שהנורמל $\vec{n}$ מאונך למישור המשיק, נקבל שהוקטורים $\beta', \beta' \times \vec{n}$ הם בסיס למישור המשיק.

מכיוון שהוקטורים $\{\beta', \vec{n}, \beta' \times \vec{n}\}$ הם בסיס, אפשר להציג את β'' כצירוף ליניארי שלהם.

יתרה מזאת, מכיוון ש־β'' ו־β' מאונכים, אפשר להציג את β'' כצירוף ליניארי של $\vec{n}, \beta' \times \vec{n}$ בלבד:

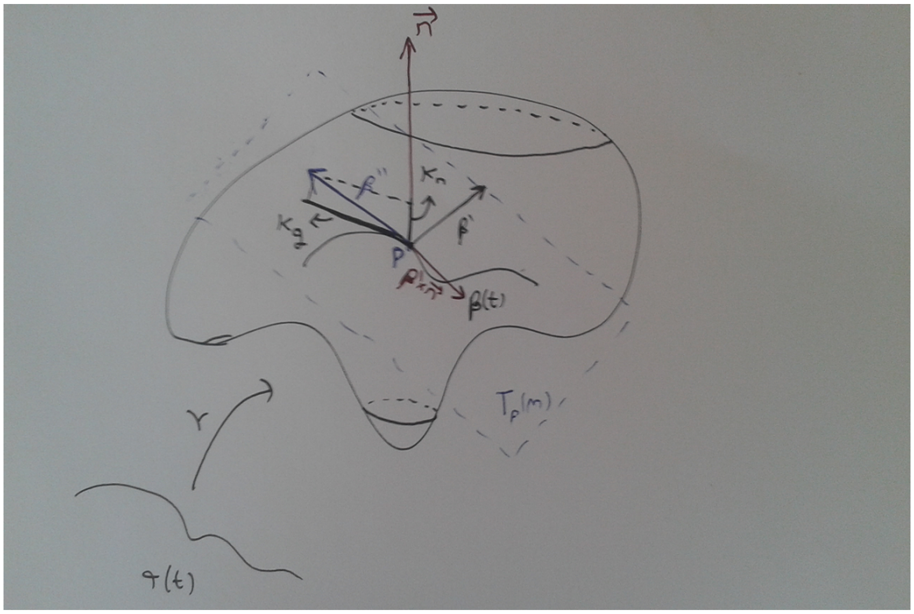
$$\beta'' = k_g \cdot (\beta' \times \vec{n}) + k_n \cdot \vec{n}$$

הגדרה 10.1 תהי β עקומה (במהירות יחידה) על משטח M.

העקמומיות הגיאודזית של β היא k_g.

העקמומיות הנורמלית של β היא k_n.

מקובל לקחת אותן בערכן המוחלט.



עקמומיות גיאודזית ועקמומיות נורמלית, רמברדנט 1642; שמן על בד.

הערה 10.2 k_n תלויה בנורמל, ולכן היא תכונה חיצונית.
k_g תלויה במישור המשיק ובמשטח עצמו, ולכן היא תכונה פנימית.

איך נחשב את העקמומיות הגיאודזית והעקמומיות הנורמלית?
מכיוון שהבסיס $\{\beta', \vec{n}, \beta' \times \vec{n}\}$ הוא אורתונורמלי, מתקיים:

$$k_g = |\beta'' \cdot (\beta' \times \vec{n})|$$

$$k_n = |\beta'' \cdot \vec{n}|$$

הערה 10.3 מכיוון שהעקמומיות של β היא $k = \|\beta''\|$, נקבל:

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

k_g מתארת את החלק מהעקמומיות שנובע מהשינוי בתוך המשטח, ו-k_n מתארת את החלק מהעקמומיות שנובע מהשינוי מחוץ למשטח.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את העקמומיות הגיאודזית והעקמומיות הנורמלית של המעגל:

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$

על הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הפרבולואיד היא:

$$X(u,v) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$$

ראשית, נשים לב לכך ש:

$$\beta' = (-\sin t, \cos t, 0) \Longrightarrow \|\beta'\| = 1$$

והעקומה β אכן נתונה במהירות יחידה.

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1, 0, 2u), X_v = (0, 1, 2v)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

הנורמה היא:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} (-2u, -2v, 1)$$

כלומר:

$$\vec{n}(\beta(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 t + 4\sin^2 t}} (-2\cos t, -2\sin t, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2\cos t, -2\sin t, 1)$$

כעת:

$$\beta' \times \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -2\cos t & -2\sin t & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos t, \sin t, 2\right)$$

ולכן:

$$k_g = \left|\beta'' \cdot \left(\beta' \times \vec{n}\right)\right| = \left|\left(-\cos t, -\sin t, 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos t, \sin t, 2\right)\right|$$

כלומר:

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

כמו כן:

$$k_n = \left|\beta'' \cdot \vec{n}\right| = \left|\left(-\cos t, -\sin t, 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-2\cos t, -2\sin t, 1\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

משפט 10.4 אפשר לחשב את העקמומיות הנורמלית בעזרת התבנית היסודית השנייה, באופן הבא:

$$k_n = II\left(\beta', \beta'\right) = \left(\beta'\right)^t \left(L_{ij}\right) \beta'$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את העקמומיות הגיאודזית והעקמומיות הנורמלית של המעגל:

$$\beta\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t, 1\right)$$

על הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$, באמצעות המשפט.

<u>פתרון:</u>

כפי שראינו, פרמטריזציה של הפרבולואיד היא:

$$X\left(u, v\right) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$$

אם נחשב את התבנית היסודית השנייה של המשטח, נקבל:

$$(L_{ij})=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

במקרה שלנו, $u=\cos t, v=\sin t$ ו: $\beta'=(-\sin t,\cos t,0)$, ולכן:

$$k_n=\begin{pmatrix}-\sin t & \cos t & 0\end{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 t+4\sin^2 t}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

נתעלם מהקואורדינטה האחרונה כמובן (כדי שהכפל יהיה אפשרי), ונקבל:

$$k_n=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

כעת, β היא מעגל שרדיוסו 1, ולכן $k=1$. כלומר:

$$1=\frac{4}{5}+k_g^2$$

מכיוון ש: $k^2=k_g^2+k_n^2$, ולכן:

$$k_g=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

הערה 10.5 שימו לב שאם $k_g=0$, נקבל שהוקטור β'' תלוי בנורמל $\vec{n}$ בלבד.

ראינו שהוקטור β'' תלוי בנורמל בלבד אם רק אם β עקומה גיאודזית, ולכן אפשר לומר: β עקומה גיאודזית אם רק אם $k_g=0$.

בעצם, העקמומיות הגיאודזית k_g מודדת את ה"גיאודזיות" של העקומה - עד כמה העקומה אכן גיאודזית, נותנת את המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות על המשטח.

10.2 אלמנט השטח של משטח

כפי שכבר ראינו, אם משטח נתון על ידי פרמטריזציה $X(u,v):U\to M$ אפשר לחשב את שטח הפנים שלו על ידי:

$$\iint\limits_M dS=\iint\limits_U\sqrt{\det(g_{ij})}dudv$$

כאשר (g_{ij}) היא המטריקה.

שימו לב - האינטגרל השמאלי הוא אינטגרל משטחי. כלומר, אלמנט השטח של המשטח הוא $\sqrt{\det(g_{ij})}$.

אנו יודעים מקורסים אחרים (אינפי 4) שאלמנט השטח של המשטח הוא $\|X_u \times X_v\|$.

אם ניזכר בזהות בינה־קושי מהפרק השני:

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

ונסמן: $X_u = a = c, X_v = b = d$, נקבל:

$$\langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle$$

כלומר:

$$\|X_u \times X_v\|^2 = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = \det(g_{ij})$$

ואכן:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

מהו בכלל "אלמנט שטח"?

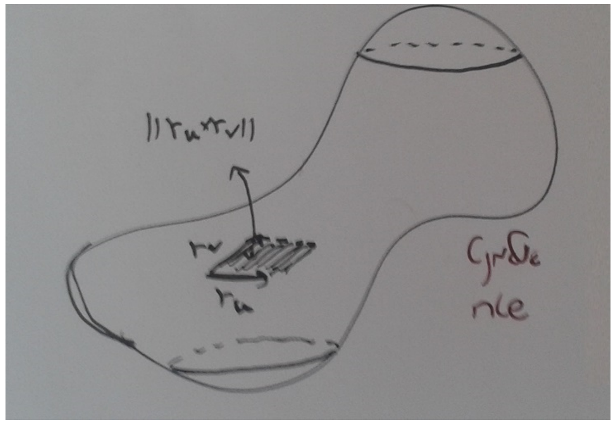
אנו רוצים לחשב את שטחו של המשטח.

אם כך, נחלק אותו לחתיכות קטנות כמו ריבועים, משולשים וכן הלאה (שאת שטחן אנו יודעים לחשב) ונחשב את השטח של כל אחת מהן; סכום השטחים ייתן את השטח.

מדובר כמובן, על משהו מעט יותר עמוק - משאיפים את החתיכות לחתיכות מגודל 0 (קרי לוקחים חתיכות יותר ויותר קטנות) והגבול של סכום השטחים הוא שטח המשטח.

אם כך, נבחר לרצף את המשטח באמצעות מקביליות שנוצרות בכל נקודה על ידי הוקטורים X_u, X_v.

אנו יודעים ששטחה של מקבילית כזו הוא אכן $\|X_u \times X_v\|$.



אלמנט שטח, אדוארד מאנה (לא קלוד מונה!) 1854; שמן על עץ.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את שטח הפנים של המשטחים הבאים:

1. הספירה שרדיוסה הוא R, S_R^2.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הספירה שלנו היא למשל:

$$X(\theta,\phi)=(R\cos\theta\sin\phi,R\sin\theta\sin\phi,R\cos\phi)$$

כאשר $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$ (סיבבנו חצי מעגל סיבוב שלם).

זהו משטח סיבוב של העקומה $(R\sin\phi,0,R\cos\phi)$, ולכן המטריקה היא:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}R^2\sin^2\phi & 0\\ 0 & R^2\end{pmatrix}$$

(זו אינה פרמטריזציה במהירות יחידה).

לכן אלמנט השטח הוא: $\sqrt{\det(g_{ij})}=R^2\sin\phi$, ולכן:

$$S=\iint\limits_{S_R^2}dS=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}R^2\sin\phi d\phi d\theta=2\pi R^2\cdot\left(-\cos\phi|_0^{\pi}\right)=4\pi R^2$$

2. הטורוס T^2:

$$X(\theta,\phi)=((a\cos\phi+b)\cos\theta,(a\cos\phi+b)\sin\theta,a\sin\phi)$$

כאשר $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ (מסובבים מעגל סיבוב שלם).

פתרון:

זהו שוב משטח סיבוב, והמטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (a\cos\phi + b)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן אלמנט השטח הוא: $\sqrt{\det(g_{ij})} = a(a\cos\phi + b)$.

לכן:

$$S = \iint\limits_{T^2} dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a(a\cos\phi + b)\, d\phi d\theta = 2\pi a \cdot \left(a\int\limits_0^{2\pi} \cos\phi d\phi + b\int\limits_0^{2\pi} d\phi \right) =$$

$$2\pi a \cdot \left(a \cdot \sin\phi|_0^{2\pi} + 2\pi b \right) = 4\pi^2 b$$

10.3 עקמומיות כוללת ומשמעות גיאומטרית

הגדרה 10.6 **עקמומיות כוללת** היא האינטגרל של העקמומיות.

למשל, אם k היא העקמומיות של עקומה β, העקמומיות הכוללת שלה היא:

$$\int\limits_\beta k(s)\, ds$$

כאשר הפרמטריזציה במהירות יחידה.

העקמומיות הגיאודזית הכוללת היא:

$$\int\limits_\beta k_g ds$$

עבור משטח M, העקמומיות הכוללת היא:

$$\iint\limits_M K dS$$

העקמומיות הכוללת מבטאת את סך כל העקמומיות.

כלומר, אנו יודעים לחשב את עקמומיותה של עקומה בכל נקודה. העקמומיות הכוללת של העקומה אומרת עד כמה בסך הכל היא עקומה.

באופן דומה, עקמומיותו הכוללת של משטח אומרת עד כמה בסך הכל המשטח עקום.

תרגיל:

חשבו את העקמומיות הכוללת של ספירה עם רדיוס R.

<u>פתרון:</u>

ראינו שעקמומיותה של ספירה כזו היא:

$$K = \frac{1}{R^2}$$

ולכן העקמומיות הכוללת היא:

$$\iint KdS = \frac{1}{R^2} \cdot \iint dS$$

האינטגרל $\iint dS$ מבטא את שטח הספירה, שהוא $4\pi R^2$. לכן:

$$\iint KdS = \frac{1}{R^2} \cdot \iint dS = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$$

ולכן עקמומיותה הכוללת של הספירה היא 4π.

שימו לב לכך שהעקמומיות הכוללת אינה תלויה ברדיוס.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את עקמומיותה הכוללת של העקומה:

$$\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

כאשר $t \in [0, 4\pi]$.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נחשב את העקמומיות.

וקטורי הנגזרות הם:

$$\alpha'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t), \alpha''(t) = (-4\cos 2t, -4\sin 2t)$$

כעת:

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = \begin{vmatrix} -2\sin 2t & -4\cos 2t \\ 2\cos 2t & -4\sin 2t \end{vmatrix} = 8\sin^2 2t + 8\cos^2 2t = 8$$

כמו כן:

$$\|\alpha'(t)\|^3 = \left(4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t\right)^{\frac{3}{2}} = 8$$

ולכן:

$$k(t)=\frac{8}{8}=1$$

בסך הכל הגיוני, מכיוון שגיאומטרית זהו מעגל עם רדיוס 1.
לפיכך:

$$\int\limits_{\gamma} kds=\int\limits_{0}^{4\pi} 1\cdot\left\|\alpha'(t)\right\| dt=\int\limits_{0}^{4\pi} 2dt=8\pi$$

מה המשמעות הגיאומטרית של העקמומיות הכוללת של עקומה?
העקמומיות הכוללת מבטאת את מספר הסיבובים שעשתה העקומה (כפול 2π).
למספר זה שימושים רבים בענפי מתמטיקה שונים.
למשל, באנליזה מרוכבת, מספר הסיבובים של עקומה C סביב מספר מרוכב ξ הוא:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{1}{z-\xi}dz$$

לפי נוסחת האינטגרל של קושי.

10.4 משפט גאוס־בונה

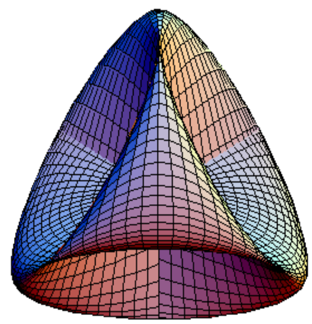
הגדרה 10.7 משטח M נקרא אוריינטבילי, אם אפשר לבחור עליו נורמל עבור צד מסוים.
אינטואיטיבית, משטח הוא אוריינטבילי אם יש לו שני צדדים.

<u>לדוגמה:</u>
ספירה, טורוס ופרבולואיד הם אוריינטבילים (אפשר לבחור נורמל חיצוני או נורמל פנימי).
טבעת מביוס היא לא משטח אוריינטבילי:

גם משטח שטיינר (נקרא גם משטח רומאי, מכיוון ששטיינר גילה אותו עת היה ברומא) הנתון על ידי הפרמטריזציה:

$$\left(R^2\cos\theta\cos\phi\sin\phi, R^2\sin\theta\cos\phi\sin\phi, R^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi\right)$$

אינו אוריינטבילי:



הגדרה 10.8 הג'ינוס ($genus$) של משטח אוריינטבילי הוא (אינטואיטיבית) מספר החורים שבו.

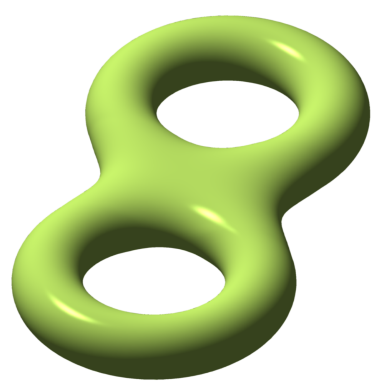
ההגדרה למשטחים לא אוריינטבילים יותר מורכבת ולא נציג אותה כאן.

לדוגמה:

לספירה ג'ינוס 0, כי הרי אין לה חורים.

לטורוס ג'ינוס 1, כי יש בו חור אחד.

גלגל ים זוגי הוא משטח עם ג'ינוס 2 כי יש בו שני חורים:



משפט 10.9 משפט גאוס־בונה על משטח קומפקטי ואוריינטבילי:

$$\iint\limits_M KdS = 2\pi\left(2-2g\right)$$

כאשר g הוא הג'ינוס של M.

הערה 10.10 שימו לב שהג'ינוס הוא תמיד אי־שלילי (הרי אין משטח עם מספר שלילי של חורים).

לכן, כשמדובר במשטחים קומפקטיים אוריינטביליים, העקמומיות הכוללת היא לכל היותר 4π.

מאידך גיסא, אין לה חסם תחתון ־ ככל שנחורר את המשטח יותר ויותר, העקמומיות הכוללת תקטן.

זאת, מכיוון שכל חור מוסיף למשטח הרבה נקודות היפרבוליות (כמו שראינו ביחס לטורוס), אך לא מוסיף כנגדן נקודות אליפטיות.

עם זאת, אפשר למצוא משטחים עם עקמומיות כוללת גדולה כרצוננו (וכפולה של 4π) כפי שנעיר בהערה הבאה.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את העקמומיות הכוללת של הספירה והטורוס באמצעות משפט גאוס־בונה ובאמצעות חישוב ישיר.

<u>פתרון:</u>

נסמן את המשטח ב־M בכל פעם.

חישבנו את עקמומיותה הכוללת של הספירה ישירות וראינו שמתקיים:

$$\iint\limits_M KdS = 4\pi$$

הג'ינוס של הספירה הוא 0, ולכן לפי משפט גאוס־בונה:

$$\iint\limits_M KdS = 2\pi\left(2-2\cdot 0\right) = 4\pi$$

כנדרש.

עבור הטורוס, הג'ינוס הוא 1 ולכן:

$$\iint\limits_M KdS = 2\pi\left(2-2\cdot 1\right) = 0$$

מצד שני, עקמומיותו של הטורוס היא:

$$K=\frac{\cos\phi}{a\left(a\cos\phi+b\right)}$$

ואלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}=a\left(a\cos\phi+b\right)$$

כפי שראינו.
התחום הוא $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, ולכן:

$$\iint\limits_{M}KdS=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\cos\phi}{a\left(a\cos\phi+b\right)}\cdot a\left(a\cos\phi+b\right)d\phi d\theta=$$

$$=2\pi\cdot\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\phi d\phi=2\pi\cdot\left.\sin\phi\right|_{0}^{2\pi}=0$$

כנדרש.

הערה 10.11 העקמומיות הכוללת של משטח שהוא איחוד זר של משטחים (קומפקטיים ואוריינטביליים) היא סכום העקמומיות הכוללות של כל אחד מהם.
למשל, אם נתבונן במשטח M המוגדר על ידי המשוואה:

$$\left((x-10)^2+y^2+z^2-1\right)\left((x+10)^2+y^2+z^2-1\right)=0$$

קל לראות שהוא מורכב משתי ספירות זרות, ולכן:

$$\iint\limits_{M}KdS=4\pi+4\pi=8\pi$$

תרגילים נוספים

1. חשבו את שטח המשטחים הבאים:

(א) החרוט שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(\phi,0,\phi\right)$$

כאשר $\phi\in\left[0,1\right]$.

(ב) ההליקואיד:

$$X\left(u,v\right)=\left(u\cos v,u\sin v,v\right)$$

כאשר $\left(u,v\right)\in\left[0,1\right]\times\left[0,2\pi\right]$.

2. משטח M ב־$\mathbb{R}^{3}$ נתון על ידי המשוואה:

$$z^{2}+\left(x^{2}+y^{2}-1\right)\left(2x^{2}+3y^{2}-1\right)=0$$

חשבו:

$$\iint\limits_{M}KdS$$

כאשר K היא עקמומיות גאוס של המשטח, כמובן.

3. (שאלה ממבחן) עבור המשטח M הבא:

$$\left(x^{2}+y^{2}+2z^{2}-1\right)\left(\left(x-10\right)^{2}+y^{2}+2z^{2}-1\right)=0$$

חשבו את $\iint_{M}KdS$.

4. חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של המשטחים הבאים:

(א) קטנואיד שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(\cosh\phi,0,\phi\right)$$

כאשר $\phi\in\mathbb{R}$.

(ב) פרבולואיד שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(\phi,0,\phi^{2}\right)$$

כאשר $\phi\in\left[0,\infty\right)$.

5. חשבו את העקמומיות הכוללת של העקומות הבאות:

(א) $\alpha(t)=(2a\cos t+a\cos 2t,2a\sin t-a\sin 2t)$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

(ב) $\alpha(t)=\left(a\cos^3 t,a\sin^3 t\right)$, כאשר $a>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$.

6. (שאלת בונוס) הוכיחו שכל משטח קומפקטי מכיל נקודות אליפטיות.

7. יהי M משטח קומפקטי ואוריינטבילי, עם ג'ינוס חיובי. הוכיחו שבמשטח קיימות נקודות אליפטיות, היפרבוליות ונקודות בהן $K=0$.

פתרונות

1. נשתמש בנוסחה:

$$\iint\limits_{M} dS = \iint\limits_{U} \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} dudv$$

(א) פרמטריזציה של החרוט היא:

$$X\left(\theta, \phi\right) = \left(\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, \phi\right)$$

כאשר $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.
זהו משטח סיבוב, המטריקה היא:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$S = \iint\limits_{M} dS = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2\phi^2} d\phi d\theta = 2\sqrt{2}\pi\cdot\int\limits_{0}^{1} \phi d\phi = 2\sqrt{2}\pi\cdot \frac{\phi^2}{2}\Bigg|_{\phi=0}^{\phi=1} = \sqrt{2}\pi$$

(ב) המטריקה היא:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$S = \iint\limits_{M} dS = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1+u^2} dvdu = 2\pi\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+u^2} du =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$$

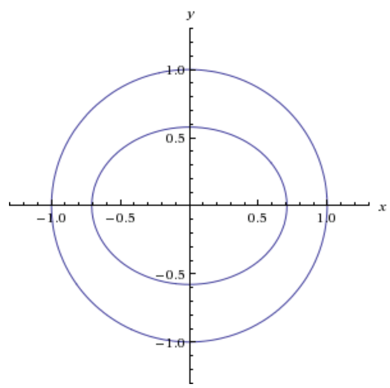
2. נרצה להשתמש במשפט גאוס־בונה (אחיינו של אבא־בונה, שבשעת סיפור מוצא מקום מיוחד).
איך נראה המשטח שלנו? נעביר אגף ונוציא שורש:

$$z = \pm\sqrt{-\left(x^2+y^2-1\right)\left(2x^2+3y^2-1\right)}$$

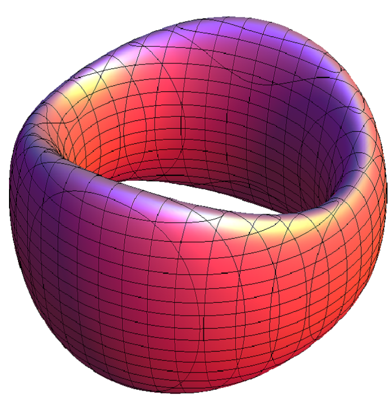
שימו לב שהמשטח סימטרי ביחס למישור xy.

אנו רוצים שהביטוי בתוך השורש יהיה כמובן אי־שלילי, כלומר שאחד מהביטויים במכפלה יהיה חיובי והשני שלילי.

אם נצייר את הגרפים של x^2+y^2-1 (מעגל) ושל $2x^2+3y^2-1$ (אליפסה) נקבל אליפסה שנמצאת בתוך מעגל:



והתחום שלנו הוא בין המעגל והאליפסה. לכן, המשטח שלנו הוא מין טורוס עקום:



למשטח יש "חור" אחד, ולכן הגנוס שלו הוא: $g=1$. אם כך, לפי משפט גאוס־בונה:

$$\iint\limits_M K d\sigma = 2\pi\left(2-2g\right)=0$$

3. מהו המשטח M? מדובר בשני אליפסואידים זרים:

$$\mathbf{S}_1 : x^2+y^2+2z^2=1$$

$$\mathbf{S}_2 : (x-10)^2 + y^2 + 2z^2 = 1$$

עקמומיות גאוס הכוללת של כל אחד מהם היא 4π, כי הג'ינוס של כל אחד מהם הוא $g=0$ (אין להם חורים). לכן בסה"כ:

$$\iint\limits_M KdS = \iint\limits_{\mathbf{S}_1} KdS + \iint\limits_{\mathbf{S}_2} KdS = 8\pi$$

4. לא נוכל להשתמש במשפט גאוס בונה, ולכן נחשב ישירות.

(א) המשטח הוא:

$$X(\theta,\phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$$

כפי שראינו בעבר, המטריקה היא:

$$(g_{ij}) = \cosh^2\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ועקמומיות גאוס היא:

$$K = -\frac{1}{\cosh^4\phi}$$

אלמנט השטח של המשטח הוא:

$$dS = \sqrt{\det(g_{ij})}d\theta d\phi = \cosh^2\phi d\theta d\phi$$

התחום הוא:

$$(\theta,\phi) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}$$

ולכן:

$$\iint KdS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\cosh^4\phi}\cosh^2\phi d\theta d\phi = -2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh^2\phi}d\phi =$$

$$= -2\pi \cdot \lim_{b\longrightarrow\infty}(\tanh b - \tanh(-b)) =$$

נזכור ש: $\tanh b = \frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}$, ונקבל:

$$= -2\pi \cdot \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{2\left(e^b-e^{-b}\right)}{e^b+e^{-b}}\right) = -4\pi \cdot \lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}\right) = -4\pi$$

(ב) המשטח הוא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,\phi^{2}\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_{\theta}=\left(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0\right),X_{\phi}=\left(\cos\theta,\sin\theta,2\phi\right)$$

המטריקה היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}\phi^{2} & 0\\ 0 & 1+4\phi^{2}\end{array}\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_{\theta}\times X_{\phi}=\left|\begin{array}{ccc}i & j & k\\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \sin\theta & 2\phi\end{array}\right|=\left(2\phi^{2}\cos\theta,2\phi^{2}\sin\theta,-\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert =\sqrt{4\phi^{4}\cos^{2}\theta+4\phi^{4}\sin^{2}\theta+\phi^{2}}=\phi\sqrt{4\phi^{2}+1}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_{\theta}\times X_{\phi}}{\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert }=\frac{1}{\sqrt{4\phi^{2}+1}}\left(2\phi\cos\theta,2\phi\sin\theta,-1\right)$$

הנגזרות השניות הן:

$$X_{\theta\theta}=\left(-\phi\cos\theta,-\phi\sin\theta,0\right)$$

$$X_{\theta\phi}=\left(-\sin\theta,\cos\theta,0\right)$$

$$X_{\phi\phi}=\left(0,0,2\right)$$

נחשב את התבנית היסודית השנייה:

$$L_{11}=X_{\theta\theta}\cdot\vec{n}=-\frac{2\phi^{2}}{\sqrt{4\phi^{2}+1}}$$

$$L_{12}=L_{21}=X_{\theta\phi}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22} = X_{\phi\phi} \cdot \vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{4\phi^2+1}}$$

כלומר:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{2\phi^2}{\sqrt{4\phi^2+1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4\phi^2+1}} \end{pmatrix}$$

כעת:

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{\frac{4\phi^2}{4\phi^2+1}}{\phi^2(4\phi^2+1)} = \frac{4}{(4\phi^2+1)^2}$$

אלמנט השטח הוא:

$$dS = \sqrt{\det(g_{ij})}d\theta d\phi = \phi\sqrt{4\phi^2+1}d\theta d\phi$$

התחום הוא:

$$(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty)$$

ולכן:

$$\iint K dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{4}{(4\phi^2+1)^2} \cdot \phi\sqrt{4\phi^2+1}d\theta d\phi = 8\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{\phi}{(4\phi^2+1)^{\frac{3}{2}}}d\phi =$$

$$= 2\pi \cdot \left. \frac{1}{\sqrt{4\phi^2+1}} \right|_{\phi=0}^{\phi=\infty} = 2\pi$$

כמו שאנו רואים (בהנחה שלא התבלבלנו), זו לא כפולה של 4π.

5. כפי שראינו בפרק על עקומות, אלו דלתואידה ואסטרואידה.
שתיהן מקיפות את הראשית פעם אחת כאשר $0 \le t \le 2\pi$, ולכן הארגומנט שלהן (ששווה לעקמומיות הכוללת) הוא 2π.

6. שימו לב שהמשטח אינו בהכרח אוריינטבילי.
נסמן את המשטח ב־M. מכיוון שהוא קומפקטי, קיימת $p_0 \in M$ שמרחקה מהראשית מקסימלי (פונקציית הנורמה $\|\|$ היא רציפה כהרכבת רציפות ולפי ויירשטראס מקבלת מקסימום בקבוצה הקומפקטית M).
נסמן ב־S_0 את הספירה שמרכזה בראשית ורדיוסה הוא $\|p_0\|$.
כעת, $p_0 \in S_0 \cap M$, ו־M מוכל בכדור שמרכזו בראשית ורדיוסו הוא $\|p_0\|$.
המשטח נושק לספירה בנקודה p_0 ולכן יש להם את אותה העקמומיות בנקודה -

ובספירה כל נקודה היא אליפטית.
ביתר פירוט, הנורמל בנקודה p_0 הוא: $\vec{n}=\frac{p_0}{\|p_0\|}$. תהי β עקומה במהירות יחידה על המשטח כך ש: $\beta\left(0\right)=p_0$.
הפונקציה $\|\beta\left(s\right)\|^2$ $s\mapsto$ מקבלת מקסימום ב$-$ $s=0$ (כי הרי p_0 זו הנקודה עם הנורמה המקסימלית) ולכן הנגזרת השנייה לא חיובית.
נגזור ונקבל:

$$k_n\leq-\frac{1}{\|p_0\|}$$

כעת, הסתכלנו על עקומה כלשהי, ולכן לכל העקמומיות של עקומות שעוברות בנקודה אותו הסימן, ולכן K חיובית, כלומר הנקודה אליפטית.
מכיוון ש$-$ $K\left(p_0\right)>0$ ו$-$ K רציפה, יש סביבה של p_0 שבה כל הנקודות אליפטיות.

7. מכיוון ש: $g>0$, לפי משפט גאוס בונה:

$$\iint\limits_M KdS\leq0$$

כעת, לפי השאלה הקודמת קיימות במשטח נקודות אליפטיות, שבהן $K>0$.
מכיוון שהעקמומיות הכוללת אינה חיובית, קיימות בהכרח נקודות בהן $K<0$, כלומר נקודות היפרבוליות.
מכיוון שהעקמומיות K היא רציפה, לפי משפט ערך הביניים קיימות נקודות בהן $K=0$.

11 תרגילים ממבחנים

בפרקים הקודמים מפוזרים להם תרגילים רבים ממבחנים. בפרק זה העתקתי פחות או יותר את השאלות כלשונן. אם חסרים סעיפים בחלק מהשאלות סימן שהם כבר מופיעים בחוברת.

1. נסתכל על המשטח M ב$-\mathbb{R}^3$:

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:4x^2+4y^2+4z^2=1\right\}$$

א. מצאו עקומת C מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של M כמשטח סיבוב של C.

פתרון:

המשטח שלנו הוא ספירה עם רדיוס $\frac{1}{2}$ ומרכז בראשית הצירים.

אם נסובב חצי מעגל מתאים במישור xz, נקבל את מבוקשנו.

חצי המעגל נתון על ידי:

$$\beta(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t,0,\frac{1}{2}\sin t\right),t\in[0,\pi]$$

אך זו אינה עקומה במהירות יחידה.

אפשר להשתמש בנוסחה, אך קל לראות שבמקרה זה, אם ניקח:

$$\beta(s)=\left(\frac{1}{2}\sin 2s,0,\frac{1}{2}\cos 2s\right),s\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

נקבל את מבוקשנו.

כעת:

$$X(\theta,\phi)=R_\theta\cdot\beta(\phi)=\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin 2\phi,\frac{1}{2}\sin\theta\sin 2\phi,\frac{1}{2}\cos 2\phi\right)$$

היא פרמטריזציה של M כמשטח סיבוב של העקומה שלנו.

ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של M.

פתרון:

כדאי לגזור ולהכפיל. וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta=\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\sin 2\phi,\frac{1}{2}\cos\theta\sin 2\phi,0\right)$$

$$X_\phi=(\cos\theta\cos 2\phi,\sin\theta\cos 2\phi,-\sin 2\phi)$$

עם זאת, זהו משטח סיבוב של עקומה $\beta\left(s\right)=\left(r\left(s\right),0,z\left(s\right)\right)$ במהירות יחידה, ואנו יודעים שהתבנית היסודית הראשונה במקרה זה היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} r^{2}\left(s\right) & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin^{2}2\phi & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כי אצלנו $r\left(\phi\right)=\frac{1}{2}\sin2\phi$.

ג. חשבו את התבנית היסודית השניה של M.

<u>פתרון:</u>

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{\theta\theta}=\left(-\frac{1}{2}\cos\theta\sin2\phi,-\frac{1}{2}\sin\theta\sin2\phi,0\right)$$

$$X_{\theta\phi}=\left(-\sin\theta\cos2\phi,\cos\theta\cos2\phi,0\right)$$

$$X_{\phi\phi}=\left(-2\cos\theta\sin2\phi,-2\sin\theta\sin2\phi,-2\cos2\phi\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_{\theta}\times X_{\phi}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\frac{1}{2}\sin\theta\sin2\phi & \frac{1}{2}\cos\theta\sin2\phi & 0\\ \cos\theta\cos2\phi & \sin\theta\cos2\phi & -\sin2\phi \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos\theta\sin^{2}2\phi,-\frac{1}{2}\sin\theta\sin^{2}2\phi,-\frac{1}{2}\sin2\phi\cos2\phi\right)$$

ננרמל ונקבל:

$$\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert =\sqrt{\frac{1}{4}\cos^{2}\theta\sin^{4}2\phi+\frac{1}{4}\sin^{2}\theta\sin^{4}2\phi+\frac{1}{4}\sin^{2}2\phi\cos^{2}2\phi}=\frac{\sin2\phi}{2}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_{\theta}\times X_{\phi}}{\left\Vert X_{\theta}\times X_{\phi}\right\Vert }=\left(-\cos\theta\sin2\phi,-\sin\theta\sin2\phi,-\cos2\phi\right)$$

נחשב את מקדמי התבנית היסודית השנייה:

$$L_{11}=X_{\theta\theta}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}\sin^{2}2\phi$$

$$L_{12} = L_{21} = X_{\theta\phi} \cdot \vec{n} = 0$$

$$L_{22} = X_{\phi\phi} \cdot \vec{n} = 2$$

ואם כן:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ד. חשבו את מיפוי וויינגרטן של M.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנוסחה:

$$\left(L^i_j\right) = -\begin{pmatrix} \frac{4}{\sin^2 2\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. נתון המשטח הבא ב$-\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^3\right\}$$

א. מהי עקמומיות גאוס K של M?

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X(u, v) = \left(u, v, v^3\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = (1, 0, 0), X_v = \left(0, 1, 3v^2\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3v^3 \end{vmatrix} = \left(0, -3v^2, 1\right)$$

ננרמל:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1+9v^4}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+9v^4}}\left(0,-3v^2,1\right)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_u = (0,0,0) = 0 \cdot X_u + 0 \cdot X_v$$

אפשר לעצור כאן, כי נקבל שהעתקת ויינגרטן היא מטריצה עם שורת אפסים, ולכן $K = \det\left(L^i_j\right) = 0$.

ב. הוכיחו שהקו:

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\right\}$$

הוא עקומה גיאודזית על M.

<u>פתרון:</u>

אפשר לחשב את מקדמי כריסטופל, לכתוב את המשוואות הגיאודזיות ולראות שהקו אכן מקיים אותן:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' + \Gamma^1_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \Gamma^2_{ij}\left(\alpha^i\right)'\left(\alpha^j\right)' = 0 \end{cases}$$

מקדמי כריסטופל הם:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{18v^3}{1+9v^4}$$

והשאר מתאפסים. המשוואות הן:

$$\begin{cases} \left(\alpha^1\right)'' = 0 \\ \left(\alpha^2\right)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}\left(\alpha^2\right)'\left(\alpha^2\right)' = 0 \end{cases}$$

ואם נדבר בשפת u,v:

$$\begin{cases} u''=0 \\ v''+\frac{18v^3}{1+9v^4}\left(v'\right)^2=0 \end{cases}$$

על L, $y=z=0$, ולכן $v=0$ והמשוואה השנייה אכן מתקיימת.
נותרנו עם:

$$u''=0$$

לכן $u\left(t\right)=at+b$. כלומר, העקומות הגיאודזיות הן:

$$\beta\left(t\right)=\left(at+b,0,0\right)$$

ואם ניקח למשל $a=0,b=1$ אכן נקבל את L.
סתם ארוך. נשים לב שהקו אכן נמצא על המשטח.
כעת, נזכור שעקומה היא גיאודזית אם הנגזרת השנייה שלה תלויה ליניארית בנורמל, כלומר:

$$\beta''=c\cdot\vec{n}$$

פרמטריזציה של הקו שלנו היא:

$$\beta\left(s\right)=\left(s,0,0\right)$$

ולכן:

$$\beta''=\left(0,0,0\right)=0\cdot\vec{n}$$

והנגזרת השנייה אכן תלויה ליניארית בנורמל (וקטור האפס תלוי ליניארית בכל וקטור).
לכן L הוא עקומה גיאודזית.
3. א. נתון העקום $\alpha\left(t\right)=\left(\sin kt,\cos nt\right)$, כאשר k,n שונים מאפס.
מהו התנאי על k,n כדי שהעקום יהיה רגולרי?
<u>פתרון:</u>

העקום אינו רגולרי כאשר $\alpha' = 0$, כלומר:

$$(\sin kt)' = 0 \wedge (\cos nt)' = 0$$

כלומר $\cos kt = 0$ וגם $\sin nt = 0$.

$\cos kt = 0$ פירושו $kt = \frac{\pi}{2} + m_1\pi$.

$\sin nt = 0$ פירושו $nt = m_2\pi$.

העקום לא רגולרי במקרים אלה, כלומר כאשר:

$$\frac{k}{n} = \frac{kt}{nt} = \frac{\frac{\pi}{2} + m_1\pi}{m_2\pi} = \frac{2m_1 + 1}{2m_2}$$

נוכל לנסח זאת כך: אם בהצגה כשבר מצומצם של $\frac{k}{n}$ המונה אי זוגי והמכנה זוגי אז העקום לא רגולרי.

אחרת, העקום רגולרי.

ב. מהו העקום המתואר (בחלקו) על ידי $\alpha(t) = (\sin 2t, \cos t)$?

<u>פתרון:</u>

ננסה להביע את אחד המשתנים באמצעות השני:

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{1 - \cos^2 t}\cos t = 2\sqrt{1 - y^2}y$$

ולכן:

$$x^2 = 4y^2\left(1 - y^2\right)$$

ג. מהי עקמומיות העקום מסעיף ב'?

<u>פתרון:</u>

נחשב את וקטורי הנגזרות הראשונה והשנייה:

$$\alpha'(t) = (2\cos 2t, -\sin t), \alpha''(t) = (-4\sin 2t, -\cos t)$$

וכעת:

$$k = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 2\cos 2t & -4\sin 2t \\ -\sin t & -\cos t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{4\cos^2 2t + \sin^2 t}\right)^3} = \frac{-2\cos 2t \cos t - 4\sin 2t \sin t}{\left(4\cos^2 2t + \sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

אפשר אולי לשחק קצת עם זהויות טריגונומטריות; תשובה זו מספיקה.
אפשר גם עם נוסחת בייטמן.
4. ב. נתבונן בעקומה:

$$\beta(t) = (8\cos t, 10 - 10\sin t, -6\cos t)$$

מצאו פרמטר s במהירות יחידה של העקומה.

פתרון:

וקטור הנגזרות הוא:

$$\beta'(t) = (-8\sin t, -10\cos t, 6\sin t)$$

ולכן:

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{64\sin^2 t + 100\cos^2 t + 36\sin^2 t} = 10$$

והמהירות שונה מ-1. אם כן, הפרמטר s שלנו הוא:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\,dx = \int_0^t 10dx = 10t$$

נבטא את t כפונקציה של s:

$$t(s) = \frac{s}{10}$$

והעקומה בפרמטריזציה החדשה תהיה:

$$\beta(s) = \left(8\cos\frac{s}{10}, 10 - 10\sin\frac{s}{10}, -6\cos\frac{s}{10}\right)$$

קל לראות שאכן $\|\beta'(s)\| = 1$.
ג. חשבו את העקמומיות של העקומה.

פתרון:

ג. נוכל להשתמש בפרמטריזציה הטבעית שמצאנו בסעיף הקודם, ולכן:

$$k = \|\beta''(s)\|$$

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\beta''(s)=\left(-\frac{8}{100}\cos\frac{s}{10},\frac{10}{100}\sin\frac{s}{10},\frac{6}{100}\cos\frac{s}{10}\right)$$

ואם כן:

$$k=\left\|\beta''(s)\right\|=\sqrt{\frac{64}{10000}\cos^2\frac{s}{10}+\frac{100}{10000}\sin^2\frac{s}{10}+\frac{36}{10000}\cos^2\frac{s}{10}}=\frac{1}{10}$$

וזו העקמומיות.

5. יהי $a>0$ ותהי $z=\sqrt{a^2-x^2}$ עקומה במישור xz.

א. מצאו פרמטריזציה של משטח סיבוב מתאים $M\subset\mathbb{R}^3$.

פתרון:

העקומה שלנו נתונה על ידי:

$$\beta(\phi)=\left(\phi,0,\sqrt{a^2-\phi^2}\right)$$

ולכן:

$$X(\theta,\phi)=\left(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,\sqrt{a^2-\phi^2}\right)$$

היא פרמטריזציה של המשטח.

ג. חשבו את העקמומיות הממוצעת של M.

פתרון:

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta=(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0)\,,X_\phi=\left(\cos\theta,\sin\theta,-\frac{\phi}{\sqrt{a^2-\phi^2}}\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta\times X_\phi=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{\phi}{\sqrt{a^2-\phi^2}} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{\phi^2\cos\theta}{\sqrt{a^2-\phi^2}},--\frac{\phi^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-\phi^2}},-\phi\right)$$

ננרמל ונקבל:

$$\|X_\theta\times X_\phi\|=\sqrt{\frac{\phi^4\cos^2\theta}{a^2-\phi^2}+\frac{\phi^4\sin^2\theta}{a^2-\phi^2}+\phi^2}=\frac{a\phi}{\sqrt{a^2-\phi^2}}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|}=\left(-\frac{\phi}{a}\cos\theta,-\frac{\phi}{a}\sin\theta,-\frac{\sqrt{a^2-\phi^2}}{a}\right)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta=\left(\frac{\phi}{a}\sin\theta,-\frac{\phi}{a}\cos\theta,0\right)=-\frac{1}{a}\cdot X_\theta+0\cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi=\left(-\frac{1}{a}\cos\theta,-\frac{1}{a}\sin\theta,\frac{1}{a}\cdot\frac{\phi}{\sqrt{a^2-\phi^2}}\right)=0\cdot X_\theta+\frac{1}{a}\cdot X_\phi$$

לפיכך:

$$\left(L^i_j\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$H=\frac{1}{2}tr\left(L^i_j\right)=-\frac{1}{a}$$

7.ד. קבעו את העקמומיות של העקומה $2x^2-3y^2=0$ באמצעות אופרטור בייטמן.

<u>פתרון:</u>

נסמן: $F\left(x,y\right)=2x^2-3y^2$ ונחשב את הנגזרות:

$$F_x=4x,F_y=-6y$$

$$F_{xx}=4,F_{xy}=0,F_{yy}=-6$$

ולכן:

$$k=\left|\frac{4\cdot(-6y)^2-2\cdot 0\cdot 4x\cdot(-6y)-6\cdot(4x)^2}{\sqrt{\left((4x)^2+(-6y)^2\right)^3}}\right|=\left|\frac{144y^2-96x^2}{(16x^2+36y^2)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

אצלנו, $2x^2=3y^2$, ולכן:

$$k=\left|\frac{144y^2-96\cdot\frac{3}{2}y^2}{\left(16\cdot\frac{3}{2}y^2+36y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|=0$$

מבחינה גיאומטרית, הצורה מתארת שני ישרים, ולכן העקמומיות היא 0.

8. יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח המוגדר על ידי הגרף של $z=f(x,y)$, כאשר:

$$f(x,y)=3x^2+8xy-3y^2$$

יהי (e_1,e_2,e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א. מצאו את מטריצת ההסיאן של f בראשית הצירים.

<u>פתרון:</u>

נגזור את f:

$$f_x=6x+8y,f_y=8x-6y$$

$$f_{xx}=6,f_{xy}=8,f_{yy}=-6$$

ולכן:

$$H_f=\begin{pmatrix}6&8\\8&-6\end{pmatrix}$$

בכל נקודה, ובפרט בראשית הצירים.

ב. יהיו λ_i הערכים העצמיים של H_f ($i=1,2$).

יהי v_i וקטור עצמי במישור xy השייך לערך העצמי λ_i.

נגדיר מישור $P_i\subset\mathbb{R}^3$ הנפרש על ידי v_i ועל ידי e_3.

נגדיר עקומה $\gamma_i\subset\mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i=P_i\cap M$.

מצאו פרמטריזציה לעקומות γ_i.

<u>פתרון:</u>

נמצא את הערכים העצמיים:

$$\lambda_1\lambda_2 = \det H_f = -100, \lambda_1 + \lambda_2 = trH_f = 0$$

ולכן $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = 10$.

נמצא את הוקטורים העצמיים. עבור λ_1:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{cases} 6v_1 + 8v_2 = -10v_1 \\ 8v_1 - 6v_2 = -10v_2 \end{cases}$$

כלומר $v_2 = -2v_1$, ואפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

עבור λ_2:

$$\begin{cases} 6v_1 + 8v_2 = 10v_1 \\ 8v_1 - 6v_2 = 10v_2 \end{cases}$$

כלומר $v_1 = 2v_2$, ואפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המישור P_1 נפרש על ידי הוקטורים:

$$(1, -2, 0), (0, 0, 1)$$

נמצא את משוואת המישור, $Ax + By + Cz + D = 0$.

מכיוון שהמישור עובר בראשית הצירים, $D = 0$. כעת:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

ומצד שני:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-1,0)$$

ולכן המישור P_1 מוגדר על ידי המשוואה:

$$-2x-y=0\Longrightarrow y=-2x$$

נמצא את עקומת החיתוך γ_1 בצורה סתומה.
העקומה נמצאת גם במישור P_1 וגם על המשטח M ולכן מקיימת את שתי המשוואות:

$$\begin{cases} y=-2x \\ z=3x^2+8xy-3y^2 \end{cases}$$

ולכן: $z=-25x^2$, והעקומה היא:

$$\gamma_1\left(t\right)=\left(t,-2t,-25t^2\right)$$

באותה הדרך מוצאים פרמטריזציה ל$-\gamma_2$.

ג. חשבו את העתקת ויינגרטן של M בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של M בראשית הצירים.

פתרון:

פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(x,y\right)=\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$$

ולכן:

$$X_x=\left(1,0,f_x\right),X_y=\left(0,1,f_y\right)$$

ולכן המטריקה היא:

$$\begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל:

$$X_x \times X_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

הנורמה היא:

$$\|X_x \times X_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$$

נחשב את וקטורי הנגזרות השניות:

$$X_{xx} = (0, 0, f_{xx}), X_{yx} = (0, 0, f_{xy}), X_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

לכן:

$$L_{11} = X_{xx} \cdot \vec{n} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$L_{12} = L_{21} = X_{xy} \cdot \vec{n} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$L_{22} = X_{yy} \cdot \vec{n} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

ולכן התבנית היסודית השנייה היא:

$$(L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

המטריצה ההופכית של המטריקה היא:

$$\left(g^{ij}\right) = \left(1 + f_x^2 + f_y^2\right) \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}$$

בראשית, מתקיים:

$$f_x = f_y = 0$$

$$f_{xx} = 6, f_{xy} = 8, f_{yy} = -6$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

לכן גם $K = \det\left(L^i_{\ j}\right) = 100$.

9. פשטו ככל האפשר את הביטויים הבאים (הנתונים בסימון איינשטיין).

א. בטאו באמצעות Γ^l_{ij} ו-L_{ij} בלבד את $\delta^a_b \left\langle x_{ab}, n_k \right\rangle$.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נשים לב שכל האינדקסים רצים בין 1 לבין 2.

נכתוב:

$$x_{ab} = \Gamma^l_{ab} x_l + L_{ab} n$$

$$n_k = L^i_{\ k} x_i$$

לכן:

$$\left\langle x_{ab}, n_k \right\rangle = \left\langle \Gamma^l_{ab} x_l + L_{ab} n, L^i_{\ k} x_i \right\rangle = \left\langle \Gamma^1_{ab} x_1 + \Gamma^2_{ab} x_2 + L_{ab} n, L^1_{\ k} x_1 + L^2_{\ k} x_2 \right\rangle$$

נזכור שמתקיים: $\left\langle x_1, n \right\rangle = \left\langle x_2, n \right\rangle = 0$ ונישאר עם:

$$= \Gamma^1_{ab} L^1_{\ k} \left\langle x_1, x_1 \right\rangle + \Gamma^2_{ab} L^1_{\ k} \left\langle x_2, x_1 \right\rangle + \Gamma^1_{ab} L^2_{\ k} \left\langle x_2, x_1 \right\rangle + \Gamma^2_{ab} L^2_{\ k} \left\langle x_2, x_2 \right\rangle = \Gamma^i_{ab} L^j_{\ k} \left\langle x_i, x_j \right\rangle$$

$g_{ij} = \left\langle x_i, x_j \right\rangle$ ולכן:

$$= \Gamma^i_{ab} L^j_{\ k} g_{ji} = -\Gamma^i_{ab} L_{ik}$$

מכיוון ש: $L_{ik}=-L^{j}_{k}g_{ji}$.
לכן:

$$\langle x_{ab},n_k\rangle\,\delta^a_b=-\Gamma^i_{ab}L_{ik}\delta^a_b=-\Gamma^i_{aa}L_{ik}$$

10. נתונה תבנית ריבועית $Q\left(x,y\right)=-3x^2+4xy-6y^2$.
א. עקומה מישורית מוגדרת על ידי $Q=-1$. מהי צורת העקומה?
<u>פתרון:</u>
נכתוב:

$$3x^2-4xy+6y^2-1=0$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-1=0$$

נמצא את הערכים עצמיים של המטריצה:

$$\lambda_1+\lambda_2=trace=9$$

$$\lambda_1\lambda_2=det=14$$

ולכן $\lambda_1=2,\lambda_2=7$.
שני הערכים העצמיים חיוביים ולכן זו אליפסה.
ב. מהי העקמומיות הכוללת של העקומה הזו?
<u>פתרון:</u>
זו אליפסה, והעקומה עושה סיבוב אחד. לכן הארגומנט הוא 2π, כלומר:

$$\int\limits_Q kds=2\pi$$

ג. מהי צורת המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית:

$$z=Q\left(x,y\right)$$

<u>פתרון:</u>

בכל מישור $z=a$ נקבל אליפסה, ולכן זהו פרבולואיד אליפטי.

נעשה את זה כמו שצריך. המשטח הוא:

$$3x^2-4xy+6y^2+z=0$$

בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

הערכים העצמיים של המטריצה הם $0,2,7$.

נמצא וקטורים עצמיים. עבור $\lambda=0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ונקבל $x=y=0$, z חופשי. נבחר:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ונקבל $x=2y, z=0$. נבחר:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=7$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ונקבל $y=-2x, z=0$. נבחר:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת והמטריצה האלכסונית הן:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

נסמן:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ונקבל שהמשטח הוא:

$$2\left(x'\right)^2+7\left(y'\right)^2+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=0$$

כלומר:

$$2\left(x'\right)^2+7\left(y'\right)^2+z'=0$$

וזהו פרבולואיד.

ד. חשבו את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

פתרון:

כמו בשאלה 8.

11. מצאו נקודה או נקודות (אם קיימות) בהן עקמומיות העקומות הבאות היא מקסימלית.

א. $x-y^2=0$.

פתרון:

נשתמש בנוסחת בייטמן כדי למצוא את העקמומיות, ולאחר מכן נמצא לה מקסימום.

הפונקציה F היא: $F(x,y)=y-x^2=0$. כעת:

$$F_x=-2x, F_y=1$$

$$F_{xx}=-2, F_{xy}=0, F_{yy}=0$$

ולכן:

$$|k|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}=\frac{|-2|}{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^3}=\frac{2}{\left(4x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

וקל לראות שהעקמומיות המקסימלית מתקבלת כאשר $x=0$, כלומר בנקודה $(0,0)$.

ב. $xy=1, x>0$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה F היא: $F\left(x,y\right)=xy-1=0$. כעת:

$$F_x=y, F_y=x$$

$$F_{xx}=F_{yy}=0, F_{xy}=1$$

ולכן:

$$k=\frac{|-2xy|}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x^3}{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

מכיוון שעל העקומה $y=\frac{1}{x}$ ו־x חיובי.

אם גוזרים ומשווים ל־0 רואים שהמקסימום מתקבל כאשר $x=1$, כלומר בנקודה $(1,1)$.

ג. $3x^2+4y^2=1$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה F היא: $F\left(x,y\right)=3x^2+4y^2-1=0$. כעת:

$$F_x=6x, F_y=8y$$

$$F_{xx}=6, F_{yy}=8, F_{xy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|6\cdot 64y^2+8\cdot 36x^2\right|}{\left(64y^2+36x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8\cdot 12\cdot\left(4y^2+3x^2\right)}{\left(16y^2+12\cdot\left(4y^2+3x^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{96}{\left(16y^2+12\right)^{\frac{3}{2}}}$$

והמקסימום מתקבל כאשר $y=0$, כלומר בנקודות $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ (זה הגיוני מכיוון שהעיקול באליפסה "הכי חד" בדיוק בחיתוך עם ציר ה-x).

ד. $y=\ln x$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה F היא: $F(x,y)=\ln x-y=0$. כעת:

$$F_x=\frac{1}{x},F_y=-1$$

$$F_{xx}=-\frac{1}{x^2},F_{xy}=F_{yy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

והמקסימום מתקבל כאשר $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, כלומר בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

12. הביטויים הבאים נתונים בסכימת איינשטיין. בטאו באמצעות המקדמים L_{ij},Γ_{ij}^k וכו' ופשטו ככל האפשר.

ג. $\delta_j^i g_{ik}\delta_l^k$.

<u>פתרון:</u>

מהגדרת הדלתא של קרונקר, נקבל בפשטות:

$$g_{jl}$$

אפשר לפתוח את הסכום (סה"כ ארבעה ביטויים) ולהיווכח שאכן כך הוא.

12 נספחים

12.1 עוד על עקומות מישוריות

12.1.1 משוואות פרנה

הגדרה 12.1 תהי $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה חלקה ורגולרית הנתונה בפרמטריזציה טבעית.
נגדיר שני וקטורים:

א. משיק היחידה לעקומה α הוא: $\hat{T}(s)=\alpha'(s)$, והוא מקיים: $\left\|\hat{T}\right\|=1$.

ב. נורמל היחידה, $\hat{N}(s)$ הוא וקטור המקיים:

1. $\hat{N}\perp\hat{T}$.
2. $\left(\hat{T},\hat{N}\right)$ בסיס חיובי, כלומר: $\det\left(\hat{T},\hat{N}\right)=1$.

לכל פרמטריזציה, לאו דווקא טבעית, אפשר להגדיר:

$$\hat{N}(t)=R_{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

משפט 12.2 משוואות פרנה:

משוואות פרנה $(Frenet)$ מבטאות לנו את הקשר בין העקמומיות לבין הוקטורים המשיק והנורמל:

$$\begin{cases}\hat{T}'(s)=k(s)\hat{N}(s)\\ \hat{N}'(s)=-k(s)\hat{T}(s)\end{cases}$$

ואם נכתוב זאת בכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix}\hat{T}'(s)\\ \hat{N}'(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k(s)\\ -k(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T}(s)\\ \hat{N}(s)\end{pmatrix}$$

שימו לב שהפרמטריזציה טבעית. כמו כן, שימו לב שמטריצת המקדמים במשוואות היא אנטי־סימטרית.

הגדרה 12.3 ראינו שאם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $k(s)=\|\alpha''(s)\|$.
כאשר העקומה נתונה בפרמטריזציה כלשהי, $\alpha(t)$, העקמומיות נתונה על ידי הנוסחה:

$$k(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

כמו שהגדרנו בדרך א', רדיוס העקמומיות של עקומה נתון על ידי הנוסחה:

$$r\left(t\right)=\frac{1}{k\left(t\right)}$$

ומרכז העקמומיות נתון על ידי הנוסחה:

$$c\left(t\right)=\alpha\left(t\right)+r\left(t\right)\cdot\hat{N}\left(t\right)$$

זכרו שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, התבוננו באיור למעלה והחכימו.

<u>תרגיל:</u>

תהי α עקומה (חלקה ורגולרית) בעלת עקמומיות קבועה. תארו את α.

<u>פתרון:</u>

אם העקמומיות היא $k=0$, נקבל שמתקיים:

$$k\left(s\right)=\left\Vert \alpha''\left(s\right)\right\Vert =0\longrightarrow\alpha''\left(s\right)=0$$

לכן $\alpha'\left(s\right)=c$ ולכן $\alpha\left(s\right)=cs+d$, וזהו קו ישר.

אם $k\neq0$, נניח שמתקיים $k>0$. נתבונן במרכזי העקמומיות:

$$c\left(s\right)=\alpha\left(s\right)+\frac{1}{k}\hat{N}\left(s\right)$$

נראה שהפונקציה c קבועה, על ידי כך שנראה שנגזרתה שווה לאפס:

$$c'\left(s\right)=\alpha'\left(s\right)+\frac{1}{k}\hat{N}'\left(s\right)$$

נזכור ש: $\alpha'\left(s\right)=\hat{T}\left(s\right)$, ולפי משוואות פרנה: $\frac{1}{k}\hat{N}'\left(s\right)=-\hat{T}\left(s\right)$, ולכן:

$$c'\left(s\right)=\hat{T}\left(s\right)-\hat{T}\left(s\right)=0$$

ולכן $c\left(s\right)=a$ קבועה. אם כן:

$$\alpha\left(s\right)+\frac{1}{k}\hat{N}\left(s\right)=a$$

$$\alpha\left(s\right)-a=\frac{1}{k}\hat{N}\left(s\right)$$

נפעיל נורמה על שני האגפים ונקבל:

$$\|\alpha(s)-a\|=\left\|\frac{1}{k}\hat{N}(s)\right\|=\frac{1}{|k|}$$

מכיוון שהנורמל הוא נורמל יחידה. אם כן, $\gamma(s)$ מתארת אוסף נקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה, ולכן $\alpha(s)$ מעגל (שימו לב מהו הרדיוס שלו).

במקרה בו $k<0$ ניקח $c(s)=\alpha(s)-\frac{1}{k}\hat{N}(s)$ ונקבל את אותה התוצאה.

מסקנה 12.4 רק לקו ישר ולקשת מעגל יש עקמומיות קבועה.

תרגיל:

תהי $\alpha:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ עקומה שנמצאת כולה בתוך מעגל ברדיוס R.

הוכיחו שאם העקומה סגורה, קיים $s\in[0,L]$ עבורו $|k(s)|\geq\frac{1}{R}$.

פתרון:

ההגיון הוא פשוט. אם העקומה סגורה, היא צריכה לחזור לנקודה בה היא התחילה.

מכיוון שהיא בתוך המעגל, היא צריכה באיזשהו שלב לבצע עיקול חד יותר מהמעגל, ושם העקמומיות יותר גדולה מעקמומיותו של המעגל, שהיא כידוע $\frac{1}{R}$.

אם כך, נתבונן בביטוי:

$$\frac{d}{ds}\left(\left\langle\alpha(s),\gamma'(s)\right\rangle\right)=\left\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\right\rangle+\left\langle\alpha(s),\alpha''(s)\right\rangle=\left\|\alpha'(s)\right\|^2+\left\langle\alpha(s),\alpha''(s)\right\rangle$$

אם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $\|\alpha'(s)\|=1$, ולכן:

$$L=\int_0^L ds=\int_0^L\left\|\alpha'(s)\right\|^2 ds=\left|\int_0^L\left(\frac{d}{ds}\left(\left\langle\alpha(s),\alpha'(s)\right\rangle\right)-\left\langle\alpha(s),\alpha''(s)\right\rangle\right)ds\right|=$$

$$=\left|\int_0^L\frac{d}{ds}\left(\left\langle\alpha(s),\alpha'(s)\right\rangle\right)ds-\int_0^L\left\langle\alpha(s),\alpha''(s)\right\rangle ds\right|=$$

כעת:

$$\int_0^L\frac{d}{ds}\left(\left\langle\alpha(s),\alpha'(s)\right\rangle\right)ds=\left\langle\alpha(L),\alpha'(L)\right\rangle-\left\langle\alpha(0),\alpha'(0)\right\rangle=0$$

מכיוון שהעקומה סגורה. נישאר, אם כך, עם:

$$L=\left|\int_0^L \langle\alpha(s),\alpha''(s)\rangle\,ds\right|=\left|\int_0^L \left\langle\alpha(s),\hat{T}'(s)\right\rangle ds\right|=\left|\int_0^L \left\langle\alpha(s),k(s)\hat{N}(s)\right\rangle ds\right|=$$

$$=\left|\int_0^L k(s)\left\langle\alpha(s),\hat{N}(s)\right\rangle ds\right|\le\int_0^L |k(s)|\cdot\left|\left\langle\alpha(s),\hat{N}(s)\right\rangle\right| ds$$

לפי אי־שוויון קושי שוורץ:

$$\le\int_0^L |k(s)|\cdot\|\alpha(s)\|\cdot\left\|\hat{N}(s)\right\| ds$$

הפרמטריזציה טבעית ולכן $\left\|\hat{N}(s)\right\|=1$.
העקומה נמצאת כולה בתוך המעגל ולכן $\|\alpha(s)\|\le R$. נקבל:

$$L\le\int_0^L R\,|k(s)|\,ds$$

כעת, נניח בשלילה שלכל $s\in[0,L]$ מתקיים: $|k(s)|<\frac{1}{R}$. לפיכך:

$$L\le\int_0^L R\,|k(s)|\,ds<\int_0^L R\cdot\frac{1}{R}=L$$

וסתירה, ולכן קיים $s\in[0,L]$ המקיים את הדרוש.

משפט 12.5 כל איזומטריה של המישור $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ היא פונקציה מהצורה:

$$F(x)=Ax+b$$

כאשר A מטריצה אורתוגונאלית.
אפשר להכליל זאת לכל $\mathbb{R}^n$.

הערה 12.6 ניזכר בכמה מהתכונות של מטריצות אורתוגונאליות:

1. $AA^t=A^tA=I$.
2. $\|Ax\|=\|x\|$.

3. באופן יותר כללי, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

4. $\det A = \pm 1$.

ויש עוד תכונות רבות ושימושיות.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה ותהי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ איזומטריה.
נגדיר עקומה חדשה באופן הבא:

$$\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$$

הביעו את עקמומיותה של $\tilde{\alpha}$ באמצעות העקמומיות של α.

<u>פתרון:</u>

לפי המשפט, כל איזומטריה היא מהצורה $F(x) = Ax + b$ כאשר A אורתוגונאלית.
לכן:

$$\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t)) = A\alpha(t) + b$$

ולכן:

$$\tilde{\alpha}'(t) = A\alpha'(t), \tilde{\alpha}''(t) = A\alpha''(t)$$

נסמן את העקמומיות של $\tilde{\alpha}(t)$ ב$-\tilde{k}(t)$, ונחשב לפי הנוסחה:

$$\tilde{k}(t) = \frac{\det(\tilde{\alpha}'(t), \tilde{\alpha}''(t))}{\|\tilde{\alpha}'(t)\|^3} = \frac{\det(A\alpha'(t), A\alpha''(t))}{\|A\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det(A \cdot (\alpha'(t), \alpha''(t)))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

השינוי במכנה במעבר האחרון נובע מכך ש$-A$ שומרת נורמה (תכונה 3).
כעת, דטרמיננטה של מכפלה היא מכפלת הדטרמיננטות, ולכן:

$$= \frac{\det A \cdot \det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \pm\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} = \pm k(t)$$

כאשר k היא העקמומיות של α; המעבר הראשון נובע מתכונה 4 שצוינה לעיל.

<u>מסקנה:</u>

איזמוטריה שומרת על העקמומיות בערך מוחלט.

12.1.2 אבולוט ואינוולוט

הגדרה 12.7 תהי α עקומה מישורית חלקה ורגולרית. נסמן:

$$E(t)=\alpha(t)+\frac{1}{k(t)}\hat{N}(t)$$

הפונקציה $E:[0,T]\to\mathbb{R}^2$ נקראת האבולוט של α, עקומה העוברת דרך מרכזי העקמומיות של α.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את האבולוט של העקומה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

<u>פתרון:</u>

העקומה שלנו היא אליפסה; פרמטריזציה שלה היא:

$$\alpha(t)=(a\cos t,b\sin t)$$

נחשב את מרכזי העקמומיות לפי הנוסחה לפרמטריזציה כללית.

מתקיים:

$$\alpha'(t)=(-a\sin t,b\cos t)\,,\alpha''(t)=(-a\cos t,-b\sin t)$$

לכן:

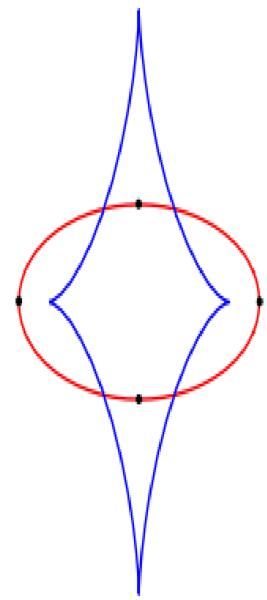
$$k(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\begin{vmatrix}-a\sin t & -a\cos t\\ b\cos t & -b\sin t\end{vmatrix}}{\left(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)^3}=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

כמו כן,

$$\hat{N}(t)=R_{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{(-a\sin t,b\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}=\frac{(-b\cos t,-a\sin t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}$$

ובסה"כ:

$$E(t)=\alpha(t)+\frac{1}{k(t)}\hat{N}(t)=(a\cos t,b\sin t)+\frac{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}{ab}\cdot(-b\cos t,-a\sin t)$$



האבולוט של אליפסה הוא אסטרואידה כזו.

למרות שהעקומה צריכה להיות רגולרית כדי שנוכל לחשב את האבולוט שלה, האבולוט עצמו לא חייב להיות עקומה רגולרית.

מתי, אם כן, האבולוט לא רגולרי? נגזור ונשווה לאפס:

$$E'(t) = \alpha'(t) + \frac{-k'(t)}{k^2(t)}\hat{N}(t) + \frac{1}{k(t)}\hat{N}'(t)$$

נזכור ש: $\alpha'(t) = \hat{T}(t)$, ולפי משוואות פרנה: $\frac{1}{k}\hat{N}'(t) = -\hat{T}(t)$, ולכן:

$$E'(t) = \hat{T}(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}\hat{N}(t) - \hat{T}(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}\hat{N}(t)$$

ולכן $E'(t) = 0$ (כלומר E לא רגולרית) כאשר $k'(t) = 0$.

נקודה כזו, שבה $k'(t) = 0$, נקראת קודקוד.

משפט 12.8 לכל עקומה סגורה ופשוטה יש לפחות ארבעה קודקודים.

הגדרה 12.9 בהינתן עקומה α, האינוולוט של α הוא העקומה I שהעקומה α היא האבולוט שלה.

12.2 עקומות מרחביות

עד עכשיו דיברנו בעיקר על עקומות מישוריות, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. עקומה מרחבית היא עקומה במרחב, כלומר:

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

נרצה להכליל את מה שלמדנו על עקומות מישוריות לעקומות מרחביות.
משיק היחידה יהיה כרגיל: $\hat{T}(s) = \beta'(s)$.
וקטור הנורמל, לעומת זאת, מעט שונה:

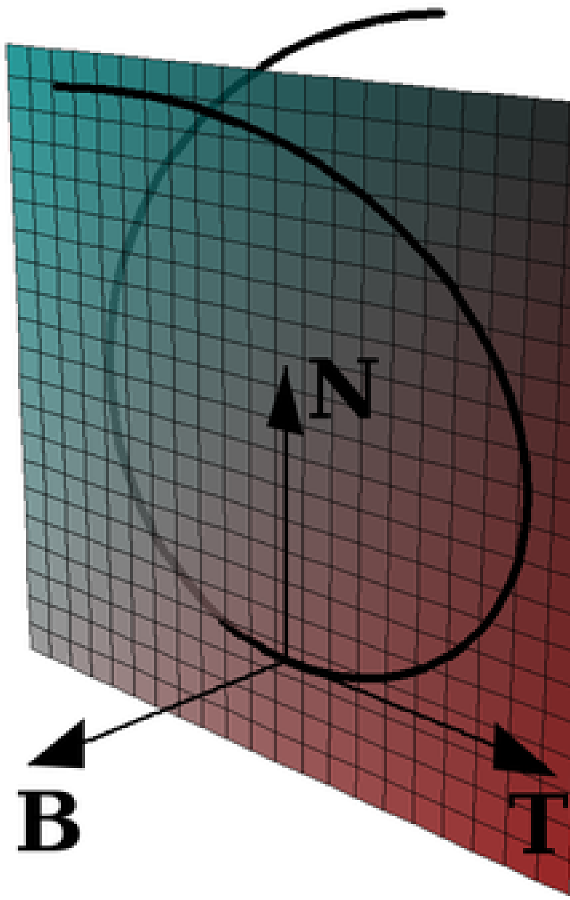
$$\hat{N}(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}$$

כדי לפרוש את המרחב אנו צריכים שלושה וקטורים, ולכן ניקח וקטור שמאונך לשני הוקטורים המשיק והנורמל שלנו.
הוקטור הבי־נורמל הוא הוקטור:

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{\beta' \times \beta''}{\|\beta''\|}$$

מהגדרת המכפלה הוקטורית, הוקטור הבי־נורמל מאונך למישור הנפרש על ידי המשיק והנורמל, ויוצר איתם בסיס עם אוריינטציה חיובית:

$$\det\left(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\right) > 0$$



בפרמטריזציה טבעית, העקמומיות היא: $k(s)=\|\beta''(s)\|$.
בפרמטריזציה רגילה העקמומיות היא:

$$k(s)=\frac{\|\beta'(s)\times\gamma''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3}$$

במרחב אנו יכולים לשאול את עצמנו שאלה נוספת. חוץ מלדעת עד כמה העקומה אכן עקומה, אפשר גם לשאול: "עד כמה העקומה מישורית"? כלומר, עד כמה העקומה נמצאת במישור אחד ולא מתפתלת?

הגדרה 12.10 למדד המודד זאת נקרא פיתול $(torsion)$. נסמנו ב$-\tau$.
כאשר הפרמטריזציה טבעית, מתקיים:

$$\tau=\frac{\det(\beta',\beta'',\beta''')}{k^2}$$

.

בפרמטריזציה כללית, הפיתול נתון על ידי הנוסחה:

$$\tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|}$$

משפט 12.11 משוואות פרנה במקרה המרחבי נקראות **משוואות פרנה־סרה** ($Frenet - Serret$), והן נתונות על ידי:

$$\begin{cases} \hat{T}'(s) = k(s)\hat{N}(s) \\ \hat{N}'(s) = -k(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s) \\ \hat{B}'(s) = -\tau(s)\hat{N}(s) \end{cases}$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

שימו לב שהפרמטריזציה טבעית. שימו לב גם לכך שמטריצת המקדמים היא אנטי־סימטרית.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שאם $\tau(s) = 0$, העקומה נמצאת על מישור אחד.

במילים אחרות, נראה שהפיתול אכן מצביע על מידת "מישוריותה" של העקומה.

<u>פתרון:</u>

מכיוון ש־$\tau(s) = 0$, לפי פרנה־סרה נקבל:

$$\hat{B}'(s) = 0$$

ולכן וקטור הבי־נורמל קבוע, $\hat{B}(s) = c$ (כי נגזרתו מתאפסת).

אנו רוצים להראות שהעקומה נמצאת כולה במישור אחד. איך נעשה זאת?

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, יש לנו וקטור התחלתי, $\beta(0)$.

לכל s אפשר להתבונן בוקטור $\beta(s)$. אנו רוצים שהוקטורים $\beta(s)$ (אם נתבונן עליהם כעל נקודות) לכל s יהיו באותו מישור.

אנו יודעים שוקטור הבי־נורמל הוא קבוע. נתבונן בוקטור $\beta(s) - \beta(0)$ לכל s, שנמצא במישור שבו נמצאים $\beta(0), \beta(s)$ ונראה שוקטור הבי־נורמל מאונך לו.

במצב כזה, β נמצאת כולה במישור שהוקטור הבי־נורמל מאונך לו; מישור המקביל למישור הנפרש על ידי המשיק והנורמל.
כלומר, נראה ש: $P\left(s\right)=\left\langle \beta\left(s\right)-\beta\left(0\right),\hat{B}\right\rangle =0$ לכל s.
ראשית, נראה שהפונקציה P קבועה, על ידי כך שנראה שנגזרתה מתאפסת:

$$P'\left(s\right)=\left\langle \left(\beta\left(s\right)-\beta\left(0\right)\right)',\hat{B}\right\rangle +\left\langle \beta\left(s\right)-\beta\left(0\right),\hat{B}'\right\rangle =$$

אנו יודעים ש: $\hat{B}'=0$ ולכן $\left\langle \beta\left(s\right)-\beta\left(0\right),\hat{B}'\right\rangle =0$.
מצד שני, $\left(\beta\left(s\right)-\beta\left(0\right)\right)'=\beta'\left(s\right)=\hat{T}\left(s\right)$ ולכן:

$$P'\left(s\right)=\left\langle \left(\beta\left(s\right)-\beta\left(0\right)\right)',\hat{B}\right\rangle =\left\langle \hat{T},\hat{B}\right\rangle =0$$

מכיוון שהוקטור הבי נורמל והוקטור המשיק מאונכים זה לזה.
אם כן, $P'\left(s\right)=0$ ולכן $P\left(s\right)=a$ קבועה.
מצד שני, $P\left(0\right)=\left\langle \beta\left(0\right)-\beta\left(0\right),\hat{B}\right\rangle =\left\langle 0,\hat{B}\right\rangle =0$ ולכן בסך הכל $P\left(s\right)=0$.
לכן הוקטור הבי־נורמל מאונך לוקטור $\beta\left(s\right)-\beta\left(0\right)$ לכל s כמו שביקשנו.
נסביר קצת יותר. משוואת מישור היא מהצורה:

$$Ax+By+Cz=D$$

כאשר $N=\left(A,B,C\right)$ הנורמל למישור. אם נסמן $\vec{x}=\left(x,y,z\right)$, נוכל להציג משוואת מישור באופן הבא:

$$\left\langle \vec{x},N\right\rangle =D$$

במקרה שלנו, $P\left(s\right)=\left\langle \beta\left(s\right)-\beta\left(0\right),\hat{B}\right\rangle =0$, ולפי הליניאריות של מכפלה סקלרית נקבל:

$$\left\langle \beta\left(s\right),\hat{B}\right\rangle =\left\langle \beta\left(0\right),\hat{B}\right\rangle$$

ואם נסמן: $\vec{x}=\beta\left(s\right),N=\hat{B}$ ו־$D=\left\langle \beta\left(0\right),\hat{B}\right\rangle$ אפשר לראות שזו אכן משוואת מישור!

הערה 12.12 איך משפיעה איזומטריה על העקמומיות ועל הפיתול?
בדומה לאיזומטריות של המישור, גם איזומטריות של המרחב שומרות על הערך המוחלט של העקמומיות ושל הפיתול (כלומר, משאירות אותם על כנם או מחליפות את הסימן).

ההוכחה פשוטה, בדומה למה שראינו על עקומות מישוריות.

אם כן, כאשר עקומה מרחבית נמצאת כולה במישור אחד, אפשר לחשב את עקמומיותה באמצעות הנוסחה של עקומות מישוריות.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\beta : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ עקומה רגולרית בפרמטריזציה טבעית עבורה $k(s)\neq 0$, $\tau(s)$.

הוכיחו כי אם העקומה נמצאת כולה על ספירת היחידה אז:

$$R^2 + \left(R'T\right)^2 = const$$

כאשר:

$$R(s) = \frac{1}{k(s)}, T(s) = \frac{1}{\tau(s)}$$

<u>פתרון:</u>

העקומה נמצאת על ספירת היחידה, ולכן:

$$\left\|\beta(s)\right\|^2 = \left\langle \beta(s), \beta(s)\right\rangle = 1$$

אנו רוצים להגיע לעקמומיות ולפיתול. לא נותר לנו אלא לגזור עד כאב:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\left\langle \beta(s), \beta(s)\right\rangle\right) = \left\langle \beta'(s), \beta(s)\right\rangle + \left\langle \beta(s), \beta'(s)\right\rangle = 2\left\langle \beta(s), \hat{T}(s)\right\rangle$$

לפי כלל המכפלה, כאשר $\beta' = \hat{T}$ כידוע. נגזור שנית:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\left\langle \beta(s), \hat{T}(s)\right\rangle\right) = \left\langle \beta(s), \hat{T}'(s)\right\rangle + \left\langle \beta'(s), \hat{T}(s)\right\rangle = 1 + \left\langle \beta(s), k(s)\hat{N}(s)\right\rangle$$

הגענו לכך בעזרת פרנה־סרה: $\hat{T}'(s) = k(s)\hat{N}(s)$, ובנוסף: $\left\langle \beta'(s), \hat{T}(s)\right\rangle = \left\langle \hat{T}(s), \hat{T}(s)\right\rangle = 1$, שהרי $\hat{T}$ הוא משיק יחידה.

לפיכך,

$$\left\langle \beta(s), k(s)\hat{N}(s)\right\rangle = -1 \Longrightarrow \left\langle \beta(s), \hat{N}(s)\right\rangle = -\frac{1}{k(s)} = -R(s)$$

אנחנו משתמשים הרבה בתכונות המכפלה הפנימית, נא לשים לב.

מזמן לא גזרנו:

$$-R'(s)=\frac{d}{ds}\left(\left\langle \beta(s),\hat{N}(s)\right\rangle\right)=\left\langle \beta'(s),\hat{N}(s)\right\rangle+\left\langle \beta(s),\hat{N}'(s)\right\rangle=$$

$$=\left\langle \hat{T}(s),\hat{N}(s)\right\rangle+\left\langle \beta(s),-k(s)\hat{T}(s)-\tau(s)\hat{B}(s)\right\rangle$$

לפי משוואות פרנה־סרה. המשיק מאונך לנורמל ולכן $\left\langle \hat{T}(s),\hat{N}(s)\right\rangle=0$ ונותרנו עם:

$$-R'(s)=\left\langle \beta(s),-k(s)\hat{T}(s)-\tau(s)\hat{B}(s)\right\rangle=-k(s)\left\langle \beta(s),\hat{T}(s)\right\rangle-\tau(s)\left\langle \beta(s),\hat{B}(s)\right\rangle$$

לאחר הגזירה הראשונה קיבלנו: $\left\langle \beta(s),T\hat{(s)}\right\rangle=0$ ולכן:

$$-R'(s)=-\tau(s)\left\langle \gamma(s),\hat{B}(s)\right\rangle\Longrightarrow\left\langle \gamma(s),\hat{B}(s)\right\rangle=\frac{R'(s)}{\tau(s)}=R'(s)T(s)$$

כעת, אנו מכירים את שלושת הביטויים:

$$\left\langle \beta(s),\hat{T}(s)\right\rangle,\left\langle \beta(s),\hat{N}(s)\right\rangle,\left\langle \beta(s),\hat{B}(s)\right\rangle$$

הוקטורים $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ מהווים בסיס אורתונורמלי, ולכן הביטויים האלו הם המקדמים של $\gamma(s)$ כצירוף ליניארי של וקטורי הבסיס האורתונורמלי הנ"ל, כלומר:

$$\beta(s)=\left\langle \beta(s),\hat{T}(s)\right\rangle\hat{T}(s)+\left\langle \beta(s),\hat{N}(s)\right\rangle\hat{N}(s)+\left\langle \beta(s),\hat{B}(s)\right\rangle\hat{B}(s)$$

זו תכונה נאה של בסיס אורתונורמלי ־ אנו יודעים מהם המקדמים בצירוף הליניארי.
אם כן, נציב את מה שחישבנו ונקבל:

$$\beta(s)=-R(s)\hat{N}(s)+R'(s)T'(s)\hat{B}(s)$$

נכפול את הוקטור עם עצמו:

$$1=\langle\beta(s),\beta(s)\rangle=\left\langle -R(s)\hat{N}(s)+R'(s)T'(s)\hat{B}(s),-R(s)\hat{N}(s)+R'(s)T'(s)\hat{B}(s)\right\rangle$$

$$=R^2\left\langle \hat{N}(s),\hat{N}(s)\right\rangle-2R(s)R'(s)T(s)\left\langle \hat{N}(s),\hat{B}(s)\right\rangle+(R'T)^2\left\langle \hat{B}(s),\hat{B}(s)\right\rangle$$

ומכיוון שזהו בסיס אורתונורמלי:

$$1 = R^2 + {(R'T)}^2$$

ואכן הביטוי קבוע.

12.3 הגדרת התבנית היסודית הראשונה; הדיפרנציאל

תרגיל:

מצאו אטלס עבור הגליל:

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2=1\right\}$$

פתרון:

פרמטריזציה של הגליל היא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\theta,\sin\theta,\phi\right)$$

כאשר $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$.

מכיוון שתחומה של מפה הוא קבוצה פתוחה, ניקח את שתי ההעתקות:

$$\begin{gathered}X_1:(0,2\pi)\to M\\ X_1\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\theta,\sin\theta,\phi\right)\\ X_2:(0,2\pi)\to M\\ X_2\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\left(\theta+\pi\right),\sin\left(\theta+\pi\right),\phi\right)\end{gathered}$$

ההעתקה הראשונה מכסה את כל הגליל למעט פס לכל אורכו; ההעתקה השנייה מכסה את הפס הזה, וכך אנו מכסים את כל הגליל.

משפט 12.13 לכל עקומה מישורית α מתקיים:

$$d_q\varphi\left(\alpha'\left(0\right)\right)=\left(\varphi\circ\alpha\right)'\left(0\right)$$

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי:

$$f\left(x,y\right)=\left(x+\sin y,\ln\left(x^2+1\right)\right)$$

חשבו את $d_pf\left(v\right)$ לכל v, כאשר $p=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

פתרון:

דרך א': נפתור כמו באינפי 3. נחשב את היעקוביאן:

$$J_f=\left(\begin{array}{cc}1&\cos y\\ \frac{2x}{x^2+1}&0\end{array}\right)$$

ובנקודה שלנו:

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$d_p f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$

כאשר $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$.

דרך ב': נשתמש במשפט שלנו.

אנו רוצים עקומה $\alpha(t)$ המקיימת:

1. $\alpha(0) = p$.
2. $\alpha'(0) = v$.

אם כן, הכי פשוט לקחת את העקומה:

$$\alpha(t) = tv + p = \left(tv^1 + 1, tv^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

כעת,

$$(f \circ \alpha)(t) = f\left(tv^1 + 1, tv^2 + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + tv^1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + tv^2\right), \ln\left(2 + 2tv^1 + t^2\left(v^1\right)^2\right)\right)$$

ולכן:

$$(f \circ \alpha)'(t) = \left(v^1 + v^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + tv^2\right), \ln\left(\frac{2v^1 + 2t\left(v^1\right)^2}{2 + 2tv^1 + t^2\left(v^1\right)^2}\right)\right)$$

ואם נציב $t = 0$ נקבל: $(f \circ \alpha)'(0) = \left(v^1, v^1\right)$.

לפי המשפט:

$$d_p f(v) = d_p f(\alpha'(0)) = (f \circ \alpha)'(0) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$

ואכן קיבלנו את אותה תוצאה.

12.4 תרגילים שונים על עקומות גיאודזיות

תרגיל:

במישור (המנוקב) נתונה מטריקה רימנית: $ds^2 = r^2\left(dr^2 + r^2 d\phi^2\right)$.

הוכיחו שכל קו גיאודזי שאינו מהצורה $\phi = const$ מבודד מהראשית.

פתרון:

המטריקה שלנו היא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^4 \end{pmatrix}$$

ובעזרת חישוב, מקדמי כריסטופל (שאינם מתאפסים) הם:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{r}, \Gamma^1_{22} = -2r, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{2}{r}$$

אם כך, המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} r'' + \frac{(r')^2}{r} - 2r(\phi')^2 = 0 \\ \phi'' + \frac{4r'\phi'}{r} = 0 \end{cases}$$

נשחק קצת עם המשוואה השנייה ונקבל: $\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{4r'}{r}$. לכן:

$$(\ln\phi')' = \frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{4r'}{r} = (-4\ln r)' = \left(\ln r^{-4}\right)'$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\phi' = \ln r^{-4} + \ln C = \ln\frac{C}{r^4} \Longrightarrow \phi' = \frac{C}{r^4}$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$r'' + \frac{(r')^2}{r} - 2r(\frac{C}{r^4})^2 = 0$$

נשחק קצת עם המשוואה ונקבל:

$$r^6 \cdot (rr')' = 2C^2$$

כאשר $(rr')' = (r')^2 + rr''$. אם כן, כאשר $r = 0$ (ואנו בראשית לפי הגדרת המטריקה) בהכרח $C = 0$.

כאשר $C = 0$, $\phi' = 0$ ולכן $\phi = const$.

לכן, רק קווים גיאודזיים מהצורה $\phi = const$ יגיעו לראשית (אם בכלל).

<u>תרגיל:</u>

עקומה רגולרית, פשוטה, סגורה וחלקה $\beta : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ נתונה בפרמטריזציה טבעית.

כמו כן, נתון כי: $\|\beta''(t)\| \neq 0$ לכל t. נגדיר:

$$X(s,t) = \beta(t) + s\hat{B}(t)$$

כאשר $\hat{B}$ הוא וקטור הבינורמל של β.

א. הוכיחו ש$-X$ הוא שיכון (אימרסיה).

ב. חשבו את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

ג. הוכיחו כי β עקומה גיאודזית על המשטח.

<u>פתרון:</u>

א. אנו בעצם רוצים להראות שהדיפרנציאל של X חח"ע, כלומר היעקוביאן היא מטריצה שדרגתה 2.

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_s = \hat{B}(t), r_t = \beta'(t) + s\hat{B}'(t) = \hat{T}(t) - s\tau(t)\hat{N}(t)$$

מכיוון ש$-\beta'(t) = \hat{T}(t)$ (הפרמטריזציה הרי טבעית) וממשוואות פרנה־סרה, $\hat{B}'(t) = -\tau(t)\hat{N}(t)$.

כעת, אנו יודעים שהוקטורים $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ מהווים בסיס (אורתונורמלי עם אוריינטציה חיובית) ובפרט בת"ל, ולכן גם וקטורי הנגזרות בת"ל.

וקטורי הנגזרות הם העמודות של היעקוביאן, ולכן דרגתה 2 כנדרש.

ב. יש לחשב את מטריקת רימן ואת התבנית היסודית השנייה, ובעזרתן את העתקת ויינגרטן

עקמומיות גאוס היא דטרמיננטתו של העתקת ויינגרטן, והעקמומיות הממוצעת שווה למחצית עקבתה.

בסופו של יום מקבלים (תוך שימוש במשוואות פרנה־סרה):

$$K = \det W = \frac{\tau^2(t)}{(1+s^2\tau^2(t))^2}$$
$$H = \frac{1}{2}trW = \frac{k(t)\left(1+s^2\tau^2(t)\right)-s\tau'(t)}{(1+s^2\tau^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

כן.

ג. עקומה היא עקומה גיאודזית אם ורק אם הנורמל למשטח מקביל לנורמל לעקומה.
לאחר חישוב (שכבר בוצע בסעיף ב'; את התבנית היסודית השנייה מחשבים בעזרת הנורמל למשטח) מקבלים:

$$\hat{n}(t,s) = \frac{\hat{N}(t) + s\tau(t)\hat{T}(t)}{\sqrt{1+s^2\tau^2(t)}}$$

על העקומה עצמה, $s=0$, ולכן:

$$\hat{n} = \hat{N}$$

ובוודאי שהם מקבילים, ולכן β אכן עקומה גיאודזית.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח רגולרי ב$-\mathbb{R}^3$ שהוא סימטרי ביחס למישור π, ותהי β עקומת החיתוך של M עם המישור π.

הוכיחו ש$-\beta$ עקומה גיאודזית.

<u>פתרון:</u>

על ידי איזומטריה נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שהמישור שלנו הוא המישור $\{z=0\}$.
תהי p נקודה על העקומה β ותהי:

$$\beta_1(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

עקומה על המשטח המקיימת $\beta(0) = p$, אך לא נמצאת כולה במישור π.
מכיוון שהמשטח סימטרי ביחס למישור, נקבל שגם העקומה:

$$\beta_2(s) = (x(s), y(s), -z(s))$$

נמצאת על המשטח. אי לכך, הנורמל למשטח $\vec{n} = (a,b,c)$ מאונך לוקטורים המשיקים לשתי העקומות:

$$\begin{cases} 0 = \langle \vec{n}, \beta_1 \rangle = ax' + by' + cz' \\ 0 = \langle \vec{n}, \beta_2 \rangle = ax' + by' - cz' \end{cases}$$

נחסר את המשוואות זו מזו ונקבל:

$$2cz' = 0$$

אפשר לבחור את β_1 להיות עקומה כזו שעבורה $z' \neq 0$ ולכן $c = 0$.
כלומר, הנורמל הוא: $\vec{n} = (a, b, 0)$. לכן הנורמל נמצא במישור π.
העקומה שלנו מישורית, לכן הנורמל שלה נמצא גם הוא במישור π ולכן הנורמל למשטח מקביל לנורמל לעקומה בכל נקודה ולכן β עקומה גיאודזית.

<u>תרגיל:</u>

תהי β עקומה רגולרית על משטח M. נניח ש־β עקומה גיאודזית. הוכיחו ש־β קו עקמומיות אם ורק אם β מישורית.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש־β קו עקמומיות פירוש הדבר שהוקטור המשיק לעקומה הוא וקטור עצמי של העתקת ויינגרטן, כלומר:

$$W\left(\beta'\left(s\right)\right) = \lambda\left(s\right)\beta'\left(s\right)$$

כמו כן, נזכור שעקומה היא מישורית אם $\tau = 0$, הפיתול הוא אפס בכל נקודה.
אם כן, אנו יודעים ש־β עקומה גיאודזית. לכן, הנורמל למשטח $\vec{n}\left(\beta\left(s\right)\right)$ מקביל לנורמל $\hat{N}\left(s\right)$ לעקומה בכל נקודה.
שני וקטורי הנורמל הם וקטורי יחידה, ווקטורי יחידה מקבילים זהים עד כדי סימן. בלי הגבלת הכלליות:

$$\hat{N}\left(s\right) = \vec{n}\left(\beta\left(s\right)\right)$$

אנו רוצים למצוא קשר אל הפיתול, ולכן נכוון אל משוואות פרנה סרה. נגזור את שני האגפים:

$$\hat{N}'\left(s\right) = \frac{d}{ds}\left(\vec{n}\left(\beta\left(s\right)\right)\right) = d\vec{n}\left(\beta\left(s\right)\right)\beta'\left(s\right) = W\left(\beta'\left(s\right)\right) = W\left(\hat{T}\left(s\right)\right)$$

השתמשנו בכלל השרשרת, בהגדרת העתקת ויינגרטן באמצעות הדיפרנציאל ובסימון $\beta'\left(s\right) = \hat{T}\left(s\right)$.
מאידך גיסא, לפי משוואות פרנה סרה:

$$\hat{N}'\left(s\right) = -k\left(s\right)\hat{T}\left(s\right) + \tau\left(s\right)\hat{B}\left(s\right)$$

כאשר k העקמומיות ו־$\hat{B}$ וקטור הבי־נורמל.
אם כן, משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$W\left(\hat{T}\left(s\right)\right) = -k\left(s\right)\hat{T}\left(s\right) + \tau\left(s\right)\hat{B}\left(s\right)$$

כעת, נניח ש־β היא קו עקמומיות. כלומר, $\beta'(s)=\hat{T}(s)$ הוא ו"ע של W. לכן,

$$W\left(\hat{T}(s)\right)=\lambda(s)\,\hat{T}(s)$$

נציב זאת במשוואה:

$$-\lambda(s)\,\hat{T}(s)=-k(s)\,\hat{T}(s)+\tau(s)\,\hat{B}(s)$$

ומכיוון שהוקטורים $\hat{B},\hat{T}$ הם (מאונכים ו) בלתי תלויים ליניארית, בצירוף ליניארי שלהם שמתאפס בהכרח המקדמים מתאפסים, כלומר:

$$\tau(s)=0$$

ולכן העקומה מישורית.

לכיוון השני, נניח שהעקומה מישורית. לכן $\tau(s)=0$, ולכן:

$$W\left(\hat{T}(s)\right)=-k(s)\,\hat{T}(s)$$

ולכן $\beta'(s)=\hat{T}(s)$ הוא וקטור עצמי של W (עם ערך עצמי k), ולכן β קו עקמומיות.

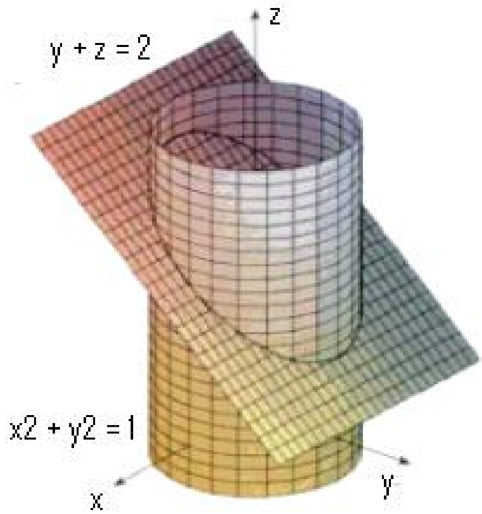
<u>תרגיל:</u>

עקומה β נוצרת על ידי חיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ עם מישור העובר דרך ראשית הצירים, כך שהזווית בין האנך למישור לבין ציר ה־z היא θ.

מהי צורת העקומה?

<u>פתרון:</u>

חיתוך כזה לדוגמה הוא:



במקרה שלנו המישור עובר בראשית; בכל אופן ניתן לראות שעקומת החיתוך היא אליפסה.

יש לנו סימטריה ביחס לסיבוב סביב ציר ה$-z$, ולכן בלי הגבלת כלליות אפשר להניח שהנורמל למישור $\vec{n}$ נמצא כולו במישור $\{y=0\}$.

הזווית בין $\vec{n}$ לבין ציר ה$-z$ היא θ ולכן:

$$\vec{n}=(\sin\theta,0,\cos\theta)$$

כל הוקטורים במישור מאונכים לנורמל, כמובן, ולכן:

$$0=\langle\vec{n},(x,y,z)\rangle=x\sin\theta+z\cos\theta$$

ולכן:

$$z=-x\tan\theta$$

כמו כן, על הגליל מתקיים:

$$y=\sqrt{1-x^{2}}$$

ולכן פרמטריזציה של העקומה, שנמצאת גם על המישור וגם על הגליל, היא:

$$\beta\left(t\right)=\left(t,\sqrt{1-t^{2}},-t\tan\theta\right)$$

אנו רוצים להראות שפרמטריזציה זו מתארת אליפסה. נציב $t=\cos\phi$ ונקבל:

$$\beta\left(\phi\right)=\left(\cos\phi,\sin\phi,-\cos\phi\tan\theta\right)$$

אם נסובב את העקומה ב-θ מעלות סביב ציר y (מה שלא משנה את צורת העקומה) נקבל:

$$\tilde{\beta}\left(\phi\right)=\left(\begin{array}{ccc}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\cos\phi\\ \sin\phi\\ -\cos\phi\tan\theta\end{array}\right)=\left(\frac{\cos\phi}{\cos\theta},\sin\phi,0\right)$$

וזו אכן אליפסה.

12.5 משוואות אוילר־לגראנז' ועקומות גיאודזיות

כשאנו רוצים (מי מאיתנו לא רוצה) למצוא נקודת קיצון (אקסטרמום) לפונקציה, אנו גוזרים ומשווים ל־0 (ובודקים לאחר מכן בעזרת קריטריון סילבסטר האם זו נקודת קיצון או שמא אמת נכון הדבר, נעשתה הנקודה הזו אוכף בישראל).

מה נעשה כשנידרש למצוא קיצון לפונקציונל, שמקבל כקלט פונקציות? נשתמש במשוואות אוילר־לגראנז'.

משוואות אוילר לגרנאז' הן משוואות דיפרנציאליות, המוגדרות על ה**לגראנז'יאן**.

הפונקציונל שלנו הוא:

$$S(\gamma)=\int_a^b L(\gamma,\gamma')\,dt$$

והלגראנז'יאן הוא האינטגרנד.

המשוואות הן:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\gamma^i)'}\right)=\frac{\partial L}{\partial\gamma^i}$$

<u>לדוגמה:</u>

נחפש f גזירה בתחום $[a,b]$ כך ש: $f(a)=c, f(b)=d$ עבורה אורך הגרף הוא מינימלי.

כמו שהסביר אוקלידס, אנו יודעים שמדובר על קו ישר. נראה זאת לפי משוואות אוילר לגראנז'.

הפונקציונל שלנו במקרה זה הוא אורך הגרף, שנתון לפי הנוסחה:

$$S(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

ולכן הלגראנז'יאן הוא:

$$L(f,f')=\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

כעת:

$$\frac{\partial L}{\partial f'}=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}},\frac{\partial L}{\partial f}=0$$

ולכן ממשוואת אוילר לגראנז' נקבל:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right)=0$$

כלומר:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}=C$$

ומכאן אפשר לראות ש$-$ $f'(x)=D$ קבועה, ולכן f קו ישר.

הערה 12.14 1. גם כשחישבנו באינפי 3 קיצון תחת אילוץ השתמשנו בפונקציה שנקראה לגראנז'יאן. האם לדעתכם יש קשר בין הפונקציות?

2. אין ספק שמציאת קיצון לפונקציונל היא בעיה שנדרשים אליה רבות; הדוגמה שנתנו היא הפשוטה ביותר וכבר אומרת משהו חשוב - המרחק הקצר היותר בין שתי נקודות הוא קו ישר.

התחום העוסק בבעיות אלו נקרא חשבון וריאציות.

מה הקשר בין קיצון של פונקציונל לעקומות גיאודיות בהן עסקנו?

עקומה גיאודזית היא העקומה הקצרה ביותר בין שתי נקודות על המשטח, וראינו שאורך עקומה הוא פונקציונל.

אם כן, בעזרת משוואות אוילר לגראנז' אפשר למצוא גיאודזים, באופן הבא:

$$L(\gamma,\gamma')=\frac{1}{2}\|\gamma'\|=\frac{1}{2}g_{ij}(\gamma)\left(\gamma^j\right)'\left(\gamma^i\right)'$$

זהו הלגראנז'יאן. הפונקציונל הוא:

$$S(\gamma)=\int\limits_a^b L(\gamma,\gamma')dt$$

והמשוואות הן:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\gamma^i\right)'}\right)=\frac{\partial L}{\partial\gamma^i}$$

כמו שראינו.

המשוואות האלו מוצאות קיצון לפונקציונל הנ"ל, כלומר הן שקולות למשוואות הגיאודזיות (שהרי העקומות הגיאודזיות הן הן הקיצון של הפונקציונל).

נשים לב שאם העקומה בפרמטריזציה טבעית, הלגראנז'יאן קבוע:

$$L=\frac{1}{2}\left\|\gamma'\right\|=\frac{1}{2}$$

וזו משוואה נוספת, ששקולה למשוואה שקיבלנו מכך שהפרמטריזציה טבעית.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הקווים הגיאודזיים על הטורוס:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\left(R+r\cos\phi\right)\cos\theta,\left(R+r\cos\theta\right)\sin\phi,r\sin\phi\right)$$

באמצעות משוואות אוילר לגראנז'. אפשר להישאר בפתרון אינטגרלי.

<u>פתרון:</u>

המטריקה שלנו היא:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\left(R+r\cos\phi\right)^{2} & 0\\ 0 & r^{2}\end{pmatrix}$$

לכן, הלגראנז'יאן הוא:

$$L\left(\theta,\theta',\phi,\phi'\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\theta' & \phi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(R+r\cos\phi\right)^{2} & 0\\ 0 & r^{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta'\\ \phi'\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}r^{2}\cdot\left(\phi'\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(R+r\cos\phi\right)^{2}\left(\theta'\right)^{2}=\frac{1}{2}$$

כי הלגראנז'יאן שווה ל־$\frac{1}{2}$ כמו שהסברנו. לכן קיבלנו משוואה:

$$r^{2}\cdot\left(\phi'\right)^{2}+\left(R+r\cos\phi\right)^{2}\left(\theta'\right)^{2}=1$$

נכתוב את משוואות אוילר־לגראנז':

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=\left(R+r\cos\phi\right)\left(-r\sin\phi\right)\left(\theta'\right)^{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi'}=r^{2}\phi'\Longrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\phi'}\right)=r^{2}\phi''$$

ולכן המשוואה הראשונה היא:

$$r^{2}\phi''=\left(R+r\cos\phi\right)\left(-r\sin\phi\right)\left(\theta'\right)^{2}$$

כמו כן:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = (R + r\cos\phi)^2 \theta'$$

ולכן המשוואה השנייה היא:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right) = 0$$

כלומר:

$$(R + r\cos\phi)^2 \theta' = Const = p_\theta$$

מספר קבוע. הפיזיקאים מביניכם מזהים את p_θ כתנע הצמוד של θ.
אם כך, יש לנו בסך הכל שלוש משוואות:

$$\begin{cases} r^2 \cdot (\phi')^2 + (R + r\cos\phi)^2 (\theta')^2 = 1 \\ r^2\phi'' = (R + r\cos\phi)(-r\sin\phi)(\theta')^2 \\ (R + r\cos\phi)^2 \theta' = p_\theta \end{cases}$$

מהמשוואה השלישית אפשר לבודד את θ' ולקבל:

$$\theta' = \frac{p_\theta}{(R + r\cos\phi)^2}$$

נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל:

$$r^2 \cdot (\phi')^2 + (R + r\cos\phi)^2 \left(\frac{p_\theta}{(R + r\cos\phi)^2}\right)^2 = 1$$

נבודד את θ' ונקבל:

$$\phi' = \sqrt{\frac{(R + r\cos\phi)^2 - p_\theta^2}{r^2 (R + r\cos\phi)^2}} = \frac{\sqrt{(R + r\cos\phi)^2 - p_\theta^2}}{r (R + r\cos\phi)}$$

לכן, נוכל לכתוב:

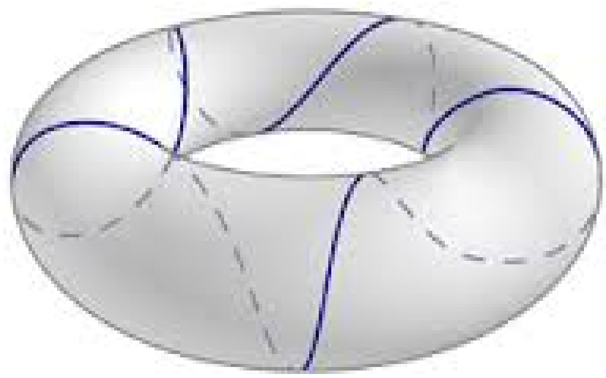
$$\frac{d\theta}{d\phi}=\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}=\frac{\theta'}{\phi'}=\frac{\frac{p_\theta}{(R+r\cos\phi)^2}}{\frac{\sqrt{(R+r\cos\phi)^2-p_\theta^2}}{r(R+r\cos\phi)}}=\frac{rp_\theta}{(R+r\cos\phi)\sqrt{(R+r\cos\phi)^2-p_\theta^2}}$$

ולכן: $d\theta=\frac{rp_\theta}{(R+r\cos\phi)\sqrt{(R+r\cos\phi)^2-p_\theta^2}}d\phi$. לפיכך:

$$\theta=\int d\theta=\int\frac{rp_\theta}{(R+r\cos\phi)\sqrt{(R+r\cos\phi)^2-p_\theta^2}}d\phi$$

וזהו פתרון אינטגרלי.

עקומה גיאודזית לדוגמה על הטורוס היא:



12.6 נקודות אמביליות

הגדרה 12.15 ***נקודה אמבילית*** היא נקודה שבה $k_1 = k_2$.

בנקודה אמבילית המטריצה $\left(L^i_j\right)$ סקלרית.

משפט 12.16 כל כיוון ב־$T_p\left(M\right)$ הוא כיוון ראשי כאשר p אמבילית.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח רגולרי שבו כל נקודה $p \in M$ היא אמבילית.

הוכיחו ש־M הוא חלק ממישור או ספירה.

<u>פתרון:</u>

לכל $p \in M$, $\left(L^i_j\right)(p) = k\left(p\right) \cdot I$ (I זו מטריצת היחידה מגודל 2×2).

כלומר, בכל נקודה המטריצה סקלרית, אך לא בהכרח אותה מטריצה סקלרית בכל נקודה.

כמו שראינו, מתקיים:

$$W\left(X_u\right) = \vec{n}_u, W\left(X_v\right) = \vec{n}_v$$

מצד שני, מכיוון ש: $W = kI$, מתקיים:

$$W\left(X_u\right) = kX_u, W\left(X_v\right) = kX_v$$

ואם כן אפשר לכתוב:

$$\begin{cases} kX_u = \vec{n}_u \\ kX_v = \vec{n}_v \end{cases}$$

נרצה להשוות בין המשוואות.

לכן, נגזור את המשוואה הראשונה לפי v ואת המשוואה השנייה לפי u ונקבל:

$$\begin{cases} -\vec{n}_{uv} = k_v X_u + kx_{uv} \\ -\vec{n}_{vu} = k_u X_v + kX_{uv} \end{cases}$$

לפיכך:

$$k_v X_u + kX_{uv} = k_u X_v + kX_{uv}$$

כלומר $k_v X_u = k_u X_v$.

אך, אנו יודעים שהוקטורים X_u, X_v הם בת"ל, ולכן $k_u = k_v = 0$!
לכן, העקמומיות הראשית k קבועה (וזו אכן אותה מטריצה סקלרית בכל נקודה).
אם נחזור למשוואות שלנו ונבצע אינטגרציה, נקבל ש:

$$kX_u = \vec{n}_u \Longrightarrow \int kX_u du = \int \vec{n}_u du \Longrightarrow \vec{n} = kX - v_0$$

כאשר v_0 וקטור קבוע כלשהו (קבוע האינטגרציה).
אם $k = 0$, נקבל שהנורמל קבוע: $\vec{n} = -v_0$, ולכן המשטח חלק ממישור.
אם $k \neq 0$, נפעיל נורמה על שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$1 = \|\vec{n}\| = \|kX - v_0\|$$

ולכן:

$$\left\|X - \frac{v_0}{k}\right\| = \frac{1}{\|k\|}$$

כלומר כל נקודה במשטח נמצאת במרחק קבוע מ־$\frac{v_0}{k}$ ולכן המשטח הוא חלק מספירה.
שימו לב, שהתרגיל דומה לתרגיל שעשינו על עקומות מישוריות ־ אם לעקומה מישורית עקמומיות קבועה, היא חלק מקו ישר או חלק ממעגל.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הנקודות האמביליות של הפרבולואיד:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$$

כאשר $f(u) = \frac{u^2}{a^2}, g(v) = \frac{v^2}{b^2}$.

בתרגיל 7 בתרגילים הנוספים של פרק 8 חישבנו את העתקת ויינגרטן במקרה זה.

אצלנו:

$$f'(u) = \frac{2u}{a^2}, f''(u) = \frac{2}{a^2}, g'(v) = \frac{2v}{b^2}, g''(v) = \frac{2}{b^2}$$

אנו רוצים ש: $\left(L^i_j\right) = k \cdot I$, כלומר: $B = kG$. נקבל:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+\frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^2b^2} \\ \frac{4uv}{a^2b^2} & 1+\frac{4v^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$(L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4u^2}{a^4}+\frac{4v^2}{b^2}}} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4u^2}{a^4}+\frac{4v^2}{b^2}}} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1+\frac{4u^2}{a^4} & \frac{4uv}{a^2b^2} \\ \frac{4uv}{a^2b^2} & 1+\frac{4v^2}{b^4} \end{pmatrix}$$

מכאן, אפשר לראות ש: $uv = 0$. כלומר, $u = 0$ או $v = 0$.

אם $u = 0$, נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} k = \frac{\frac{2}{a^2}}{\sqrt{1+\frac{4v^2}{b^2}}} \\ k\left(1+\frac{4v^2}{b^4}\right) = \frac{\frac{2}{b^2}}{\sqrt{1+\frac{4v^2}{b^2}}} \end{cases}$$

העקמומיות תהיינה: $k = \frac{2b}{a^3}$, וגם:

$$v = \pm\frac{1}{2}b\sqrt{|a^2-b^2|}$$

באופן דומה, אם $v = 0$ נקבל שהעקמומיות תהיינה $k = \frac{2a}{b^3}$, וגם:

$$u = \pm\frac{1}{2}a\sqrt{|a^2-b^2|}$$

ולכן יש לנו בסך הכל 4 נקודות אמביליות:

$$\left(\pm\frac{1}{2}a\sqrt{|a^2-b^2|}, 0\right), \left(0, \pm\frac{1}{2}b\sqrt{|a^2-b^2|}\right)$$

12.7 משטחים מסורגלים $(Ruled\ Surfaces)$

הגדרה 12.17 משטח מסורגל הוא משטח עם פרמטריזציה מהצורה:

$$X(u,v)=\beta(v)+u\cdot V(v)$$

כאשר β עקומה (רגולרית) ו־V שדה וקטורי. סדר הקואורדינטות לא הכרחי.
אם ניקח v_0 קבוע, נקבל קו ישר מהצורה:

$$l(u)=\gamma(v_0)+u\cdot V(v_0)$$

כלומר, אם קובעים קואורדינטה אחת ומשתנים רק לפי האחרת, מקבלים קו ישר.
קווים ישרים אלו נקראים **סרגלים** של המשטח.

לדוגמה:
גליל הוא משטח מסורגל. פרמטריזציה של גליל היא:

$$X(\theta,\phi)=(a\cos\theta,a\sin\theta,\phi)=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)+\phi\cdot(0,0,1)$$

תרגיל:
יהי $X(u,v)=\beta(v)+u\cdot V(v)$ משטח מסורגל.
הוכיחו שהסעיפים הבאים שקולים:
1. $\vec{n}$ קבוע לאורך הסרגלים, כלומר $\vec{n}_u=0$.
2. $X_{uv}\in span\{X_u,X_v\}$.
3. $K=0$.

פתרון:
$1\Longleftarrow 2$:
אנו יודעים ש־$\vec{n}$ מאונך למישור הנפרש על ידי X_u,X_v כלומר ל־$span\{X_u,X_v\}$.
לכן, כדי להראות שאכן $X_{uv}\in span\{X_u,X_v\}$ מספיק להראות ש־$\vec{n}$ מאונך ל־X_{uv}.
אם כן, מכיוון ש־$\langle\vec{n},X_v\rangle=0$, אפשר לגזור לפי u ולקבל:

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\langle\vec{n},X_v\rangle=\langle\vec{n}_u,X_v\rangle+\langle\vec{n},X_{uv}\rangle$$

מכיוון ש־$\vec{n}_u=0$, נקבל: $\langle\vec{n},X_{uv}\rangle=0$.
כמו שהסברנו זה מספיק לכך ש־$X_{uv}\in span\{X_u,X_v\}$.
$2\Longleftarrow 3$:

נתון: $X_{uv}\in span\left\{X_u,X_v\right\}$. לכן, מכיוון שהנורמל מאונך למישור הזה, $0=\left\langle \vec{n},X_{uv}\right\rangle$.
כמו כן, הפרמטריזציה של המשטח היא: $X\left(u,v\right)=\beta\left(v\right)+u\cdot V\left(v\right)$ ולכן $X_{uu}=0$.
לכן, אם נחשב את איברי המטריצה $\left(L_{ij}\right)$ נקבל:

$$L_{11}=\left\langle X_{uu},\vec{n}\right\rangle =0$$
$$L_{21}=L_{12}=\left\langle X_{uv},\vec{n}\right\rangle =0$$

ולכן:

$$\left(L_{ij}\right)=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\0 & b_{22}\end{array}\right)$$

ואם כן:

$$K=\det\left(L_j^i\right)=\frac{\det\left(L_{ij}\right)}{\det\left(g_{ij}\right)}=0$$

$3\Longleftarrow1$:
נתון: $K=0$.
נשים לב לכך שמתקיים:

$$K=\det\left(L_j^i\right)=-\det J_{\vec{n}}=-\det\left(\vec{n}_u,\vec{n}_v\right)=0$$

מטריצה שדטרמיננטתה (כן אה) מתאפסת היא לא הפיכה, ולכן עמודותיה תלויות ליניארית, קרי:

$$\vec{n}_v=c\cdot\vec{n}_u$$

אנו יודעים שנורמל מאונך לוקטורי הנגזרות, כלומר: $0=\left\langle \vec{n}_u,X_u\right\rangle =\left\langle \vec{n}_u,X_v\right\rangle$. לכן:

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \vec{n},X_u\right\rangle =\left\langle \vec{n}_u,X_u\right\rangle +\left\langle \vec{n},X_{uu}\right\rangle =\left\langle \vec{n}_u,X_u\right\rangle$$

מכיוון ש־$X_{uu}=0$, וגם:

$$0=\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \vec{n},X_u\right\rangle =\left\langle \vec{n}_v,X_u\right\rangle +\left\langle \vec{n},X_{uv}\right\rangle$$

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \vec{n},X_v\right\rangle =\left\langle \vec{n}_u,X_v\right\rangle +\left\langle \vec{n},X_{uv}\right\rangle$$

משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$\langle\vec{n}_u, X_v\rangle = \langle\vec{n}_v, X_u\rangle$$

מתכונות המכפלה הפנימית ומהעובדה ש: $\vec{n}_v = c \cdot \vec{n}_u$ נקבל:

$$0 = \langle\vec{n}_u, X_u\rangle = c \cdot \langle\vec{n}_u, X_u\rangle = \langle c \cdot \vec{n}_u, X_u\rangle = \langle\vec{n}_v, X_u\rangle = \langle\vec{n}_u, X_v\rangle$$

ולכן קיבלנו ש$-\vec{n}_u$ מאונך לשני הוקטורים X_u, X_v.
מצד שני, $\vec{n}_u \in T_{\vec{n}(p)}(M) = T_p(M) = span\{X_u, X_v\}$.
$\vec{n}_u$ מאונך לוקטורי הנגזרות וגם תלוי בהם ליניארית (והם בת"ל) ולכן בהכרח $\vec{n}_u = 0$.

12.8 גאוס־בונה על קצת יותר מקצה המזלג

12.8.1 עקמומיות גיאודזית כשינוי בזווית

אפשר להסתכל על k_g, העקמומיות הגיאודזית, כשינוי בזווית של העקומה (כלומר, הזווית של המשיק): $k_g = \theta'$.

הגדרה 12.18 מה לגבי העקמומיות הגיאודזית הכוללת?

כמו שאמרנו, אפשר להסתכל על k_g כעל θ'.

לכן, אם העקומה חלקה, נקבל שהעקמומיות הגיאודזית הכוללת שווה ל:

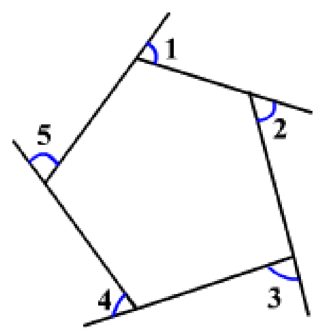
$$\int k_g = \int \theta' = \theta\left(end\right) - \theta\left(start\right)$$

כלומר, ההפרש בין הזווית בסיום לזווית בהתחלה.

אם העקומה חלקה למקוטעין, נקבל:

$$\int k_g + \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \theta\left(end\right) - \theta\left(start\right)$$

כאשר θ_i הן **הזוויות החיצוניות.**



12.8.2 משולשים גיאודזיים

הגדרה 12.19 **משולש גיאודזי** על משטח הוא משולש ששלוש צלעותיו הן עקומות גיאודזיות.

<u>לדוגמה:</u>

במישור, העקומות הגיאודזיות הן קווים ישרים ולכן משולש גיאודזי הוא משולש רגיל.

על הספירה, העקומות הגיאודזיות הן מעגלים גדולים, ולכן משולש שצלעותיו הן מעגלים גדולים הוא משולש גיאודזי.

<u>תרגיל:</u>

נתבונן במשולש על ספירת היחידה S^2 שצלעותיו הן עקומות גיאודזיות.

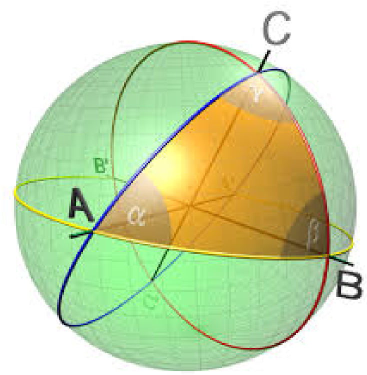
נסמן את שטחו של המשולש ב$-T$, ואת זוויותיו ב$-\alpha, \beta, \gamma$.

הוכיחו שמתקיים:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = T$$

<u>פתרון:</u>

הצלעות הן עקומות גיאודזיות על הספירה, כלומר חלק ממעגלים גדולים.



נמשיך אותן למעגלים גדולים, שמחלקים את הספירה ל-6 גזרות.

הגזרה שמתאימה לזווית α היא $\frac{\alpha}{2\pi}$ מכל הספירה, ולכן שטחה הוא:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\alpha$$

כי שטח כל הספירה הוא 4π.

כך גם באופן דומה לגזרות שמתאימות לזוויות β, γ.

מכיוון שלכל זווית יש שתי גזרות, נקבל שהשטח של כל הגזרות הוא:

$$2\left(2\alpha\right) + 2\left(2\beta\right) + 2\left(2\gamma\right) = 4\pi + 4T$$

מכיוון שהגזרות מכסות את כל הספירה למעט המשולש והמשולש האנטיפודי (שנמצא מול המשולש, בצידה השני של הספירה) פעם אחת.

את המשולש והמשולש האנטיפודי הן מכסות שלוש פעמים כל אחד.

בסך הכל, שטח הגזרות הוא שטח הספירה ללא המשולשים ועוד 6 פעמים שטח המשולש.

אם נוסיף שני משולשים מתוך ה־6 לספירה ללא המשולשים נקבל את כל הספירה ששטחה 4π ועוד 4 פעמים שטח המשולש, כלומר $4T$.

נעביר אגף, נחלק ב־4 ונקבל שאכן:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=T$$

הערה 12.20 אם היה מדובר בספירה שרדיוסה R, הזהות הייתה:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\frac{T}{R^2}$$

ואם נשאיף $R\to 0$, נקבל:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=0$$

כמו במישור (ספירה שרדיוסה אינסופי אכן דומה למישור).

אפשר לנסח את כל המשפטים מהגיאומטריה האוקלידית גם על הספירה.

למשל, **משפט הקוסינוסים**:

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\theta$$

בעוד שבמישור:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

כאשר a,b,c הן הצלעות ו־θ היא הזווית.

12.8.3 גאוס־בונה על משולשים גיאודזיים ויצורים אחרים

הגדרה 12.21 מאפיין אוילר של פאון M (גוף תלת־מימדי שכל פאותיו הן מצולעים) הוא:

$$\chi(M)=V-E+F$$

כאשר V הוא מספר הקודקודים של M, E מספר הצלעות ו־F מספר הפאות.

ההגדרה למשטח כלשהו (ובאופן כללי יותר, למבנה טופולוגי) היא מעט יותר מורכבת ולא נציג אותה כאן.

משפט 12.22 עבור פאון קמור M (מהווה קבוצה קמורה ב־$\mathbb{R}^n$) מתקיים:

$$\chi\left(M\right)=V-E+F=2$$

קבוצה $C\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת **קבוצה קמורה**, אם לכל $x,y\in C$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים:

$$xt+y\left(1-t\right)\in C$$

משפט גאוס־בונה על תחום כללי R ששפתו היא מסילה חלקה למקוטעין γ:

$$\iint\limits_{R}KdS+\int\limits_{\gamma}k_gds+\sum_{i=1}^{n}\theta_i=2\pi\chi\left(R\right)$$

משפט גאוס־בונה על משולש גיאודזי T :

$$\iint\limits_{T}KdS+\sum_{i=1}^{3}\theta_i=2\pi$$

מכיוון שצלעותיו הן עקומות גיאודזיות, $\int k_gds=0$ על כל אחת מהצלעות.
כמו כן, מאפיין אוילר של משולש הוא 1 (3 קודקודים, 3 צלעות, פאה אחת).
משפט גאוס־בונה על משטח קומפקטי M:

$$\iint\limits_{M}KdS=2\pi\chi\left(M\right)$$

<u>תרגיל:</u>
יהי M משטח עם עקמומיות גאוס K. יהי T משולש גיאודזי עם זוויות α,β,γ.
הוכיחו שמתקיים:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint\limits_{T}KdS$$

<u>פתרון:</u>
כפי שראינו, במשולש גיאודזי מתקיים:

$$\iint\limits_{T}KdS+\sum_{i=1}^{3}\theta_i=2\pi$$

כעת, למה שוות הזוויות החיצוניות θ_i?
אם הזוויות הן α, β, γ, הזוויות החיצוניות הן:

$$\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

ובסך הכל:

$$\iint_T K dS + 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$$

לפיכך:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_T K dS$$

כנדרש.

הערה 12.23 כדי להבין את הנושא לעומק, במיוחד את הסיפור של מאפיין אוילר, כדאי לקחת את הקורסים טופולגיה אלגברית 1,2.

12.9 שדות וקטוריים, גרדיאנט ושאר ירקות

12.9.1 שדות וקטוריים

הגדרה 12.24 יהי M משטח רגולרי.

שדה וקטורי משיק לקבוצה $W \subseteq M$ הוא פונקציה $\upsilon : W \to \mathbb{R}^3$ כך שלכל $p \in W$, $\upsilon(p) \in T_p(M)$.

אגד המשיקים $(Tangent\ Bundle)$ הוא הקבוצה: $T_W(M) := \bigcup_{p \in W} T_p(M)$.

השדה υ ייקרא **חלק** אם הפונקציות a, b המוגדרות על ידי השיוויון:

$$\begin{cases} \upsilon(p) = a(u,v) X_1 + b(u,v) X_2 \\ p = X(u,v) \end{cases}$$

הן חלקות.

<u>לדוגמה:</u>

נתון המעגל $(x-2)^2 + z^2 = 1$ במישור xz.

פרמטריזציה של המעגל היא למשל:

$$\beta(\phi) = (2 + \cos\phi, 0, \sin\phi)$$

אם נסובב את המשטח סביב ציר ה$-z$, נקבל טורוס עם הפרמטריזציה הבאה:

$$X(\theta, \phi) = R_\theta \cdot \beta(\phi) = ((2+\cos\phi)\cos\theta, (2+\cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$$

וקטור המשיק למעגל נתון על ידי:

$$\beta(\phi) = (-\sin\phi, 0, \cos\phi)$$

ואם נסובב את וקטור המשיק שלנו סביב ציר ה$-z$ נקבל שדה משיק:

$$\upsilon(\theta, \phi) = R_\theta \cdot \beta'(\phi) = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

הבחינו בכך שאפשר לגזור את β ואז לסובב או לסובב את β ואז לגזור ולקבל את אותה התוצאה.

נראה שהשדה שלנו הוא אכן שדה משיק.

אנו דורשים $\upsilon(p) \in T_p(M)$ לכל $p = X(\theta, \phi)$.

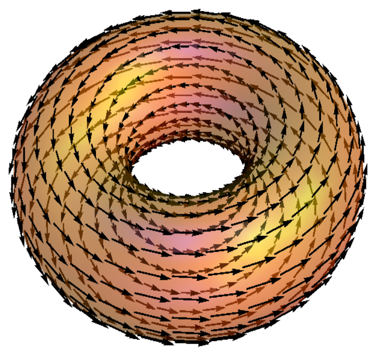
המישור המשיק נפרש על ידי וקטורי הנגזרות X_θ, X_ϕ ולכן אנו מחפשים a, b עבורם:

$$\upsilon\left(p\left(\theta,\phi\right)\right)=a\left(\theta,\phi\right)X_\theta+b\left(\theta,\phi\right)X_\phi$$

אבל קל לראות שמתקיים: $\upsilon\left(\theta,\phi\right)=X_\theta$, ולכן:

$$a=0, b=1$$

לכל נקודה p, ולכן υ אכן שדה משיק.
מכיוון שהפונקציות a, b חלקות (הן הרי קבועות) נקבל שהשדה υ הוא חלק.



12.9.2 גרדיאנט

גרדיאנט הוא שדה וקטורי (המופעל על פונקציה סקלרית) המשייך לכל נקודה וקטור המצביע אל הכיוון בו השינוי בפונקציה הסקלרית מקסימלי.
במרחב $\mathbb{R}^n$ מדובר בוקטור הנגזרות החלקיות; דשנו בנושא זה לא מעט בקורסים שעברו.
איך מכלילים זאת למשטח כלשהו?

הגדרה 12.25 הגרדיאנט $grad\left(f\right)=\nabla f$ של פונקציה $f:M\to\mathbb{R}$ כאשר M משטח מוגדר לכל $w\in T_p\left(M\right)$ כך:

$$df\left(w\right)=\left\langle \nabla f,w\right\rangle$$

כאשר df הוא הדיפרנציאל.

אם נסמן $w=w^iX_i, \nabla f=\nabla f^iX_i$ כאשר $\{X_i\}$בסיס למישור המשיק, מליניאריות המכפלה הפנימית נקבל:

$$\langle \nabla f, w\rangle = g_{ij}\nabla f^i w^j$$

כאשר $g_{ij}=\langle g_i, g_j\rangle$ כמובן.
מצד שני, הדיפרנציאל ניתן לייצוג על ידי היעקוביאן בבסיס של המישור המשיק, כלומר:

$$df\left(w\right)=J_f\left(w\right)=\left(f_1,\ldots,f_n\right)\cdot w$$

ולכן $\left(df\left(w\right)\right)^j=f_jw^j$ כאשר f_k הוא הנגזרת של f לפי המשתנה ה$k-$.
אם כן:

$$f_jw^j=g_{ij}\nabla f^iw^j$$

ולכן:

$$\nabla f^i=g^{ij}f_j$$

<u>תרגיל:</u>
חשבו את הגרדיאנט של הפוקנציות הבאות על S^2.
א. $f\left(x,y,z\right)=z$.
<u>פתרון:</u>
פרמטריזציה של ספירת היחידה היא:

$$X\left(\theta,\phi\right)=\left(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi\right)$$

אחרי חישוב נקבל:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\sin^2\phi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

כעת, לפי הקואורדינטות על הספירה הפונקציה היא:

$$f\left(\theta,\phi\right)=f\left(x\left(\theta,\phi\right),y\left(\theta,\phi\right),z\left(\theta,\phi\right)\right)=z\left(\theta,\phi\right)=\cos\phi$$

לכן:

$$df=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\theta}\\ \frac{\partial f}{\partial\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\sin\phi\end{pmatrix}$$

ובסה"כ הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f=\left(g^{ij}\right)df=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\sin\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\sin\phi\end{pmatrix}$$

ב. $f\left(x,y,z\right)=ax^2+by^2+cz^2$.

פתרון:

במקרה זה מתקיים:

$$f\left(\theta,\phi\right)=a\cos^2\theta\sin^2\phi+b\sin^2\theta\sin^2\phi+c\cos^2\phi$$

ולכן:

$$df=\begin{pmatrix}-2a\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi+2b\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\\ 2a\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi+2b\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi-2c\sin\phi\cos\phi\end{pmatrix}$$

והגרדיאנט יהיה:

$$\nabla f=\left(g^{ij}\right)df=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2a\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi+2b\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi\\ 2a\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi+2b\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi-2c\sin\phi\cos\phi\end{pmatrix}$$

אחרי שמסדרים:

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\left(b-a\right)\sin 2\theta\\ \left(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta-c\right)\sin 2\phi\end{pmatrix}$$

שאלה:

מתי שדה $v\left(u\right)=Au$ ב-$\mathbb{R}^n$ הוא גדריאנט של פונקציה סקלרית כלשהי?

תשובה:

כאשר המטריצה A סימטרית. נסו להסביר למה.

12.9.3 נגזרת לי

הגדרה 12.26 תהי $f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה, M משטח רגולרי. יהי v שדה משיק.
נגזרת לי של f לפי v מוגדרת כך:

$$L_v f\left(p\right) = \frac{d}{dt}\left(f \circ \beta\left(t\right)\right)|_{t=0} = df\left(v\right) = f_i v^i$$

כאשר $\beta\left(0\right) = p$, $\beta'\left(0\right) = v\left(p\right)$ עקומה כלשהי על M (β עקומה אינטגרלית).
נגזרת לי היא הכללה של הנגזרת הכיוונית; בנגזרת כיוונית גזרנו לפי כיוון קבוע, ואילו כאן גם הכיוון, שבא לידי ביטוי בשדה המשיק, משתנה.

<u>תרגיל:</u>
הוכיחו את הזהויות הבאות:
א. $L_{av+bw} f = aL_v f + bL_w f$.
<u>פתרון:</u>
בפשטות, לפי ההגדרה:

$$L_{av+bw} f = f_i\left(av + bw\right)^i = af_i v^i + bf_i w^i = aL_v f + bL_w f$$

ב. $L_v\left(fg\right) = fL_v g + gL_v f$.
<u>פתרון:</u>
כנ"ל:

$$L_v\left(fg\right) = \left(fg\right)_i v^i = \left(f_i g + g_i f\right) v^i = gf_i v^i + fg_i v^i = fL_v g + gL_v f$$

<u>תרגיל:</u>
תהי f פונקציה חלקה בתחום U עם מטריקה $\left(g_{ij}\right)$.
א. הוכיחו שהגרדיאנט מאונך לקווי הגובה של הפונקציה.
<u>פתרון:</u>
תהי $\alpha\left(s\right)$ עקומה שתמונתה היא קו גובה של f, כלומר:

$$f\left(\alpha\left(s\right)\right) = C$$

לכל s כאשר C קבוע.
במישור המשיק בנקודה $\alpha\left(s\right)$, הוקטור המשיק לקו הגובה הוא $\alpha'\left(s\right)$.
מהגדרת הגרדיאנט נקבל:

$$\left\langle \nabla f\left(\alpha\left(s\right)\right), \alpha'\left(s\right)\right\rangle = d_{\alpha'(s)} f\left(\alpha'\left(s\right)\right) = \left(f \circ \alpha\right)'\left(s\right) = \frac{d}{ds} C = 0$$

ולכן הגרדיאנט אכן מאונך לקווי הגובה.

ב. הוכיחו כי לכל וקטור יחידה v במישור המשיק מתקיים:

$$L_v f \leq \|\nabla f\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם:

$$v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

<u>פתרון:</u>

מהגדרת נגזרת לי ומאי־שוויון קושי־שוורץ נקבל:

$$L_v f = df\left(v\right) = \langle \nabla f, v \rangle \leq \|\nabla f\| \cdot \|v\| = \|\nabla f\|$$

מתי הביטויים שוים? רק כאשר הוקטורים מקבילים, כלומר:

$$v = t \cdot \nabla f$$

ומכיוון שהוקטור v הוא וקטור יחידה, נקבל שאכן מתקיים:

$$v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

כנדרש.

12.9.4 הקומוטטור

הגדרה 12.27 יהיו v, w שדות וקטוריים. **הקומוטטור** $[v, w]$ מוגדר כך:

$$L_{[v,w]} = L_v L_w - L_w L_v$$

ומתקיים:

$$[v, w] = \left(\frac{\partial w^i}{\partial u_j} v^j - \frac{\partial v^i}{\partial u_j} w^j\right) e_i$$

משפט 12.28 תכונות הקומוטטור:

1. אנטי־סימטריות:

$$[v,w]=-[w,v]$$

2. ליניאריות:

$$[au+bv,w]=a[u,w]+b[v,w]$$

3. זהות יעקובי:

$$[u,[v,w]]+[w,[u,v]]+[v,[w,u]]=0$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הקומוטטור עבור השדות:

$$v(u)=Au,w(u)=Bu$$

כאשר A,B מטריצות.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$$a=Au,b=Bu$$

מהגדרת כפל מטריצות:

$$v^i=a^i=A^i_ku^k,w^i=b^i=B^i_ku_k$$

לכן:

$$\frac{\partial v^i}{\partial u_j}=\frac{\partial A^i_ku^k}{\partial u_j}=A^i_k\delta^k_j=A^i_j$$

ובאופן דומה גם $\frac{\partial w^i}{\partial u_j}=B^i_j$ ולכן לפי הגדרת הקומוטטור:

$$[v,w](u)=\left[B^i_jv^j-A^i_jv^i\right]e_i(u)=Bv(u)-Aw(u)=(BA-AB)u$$

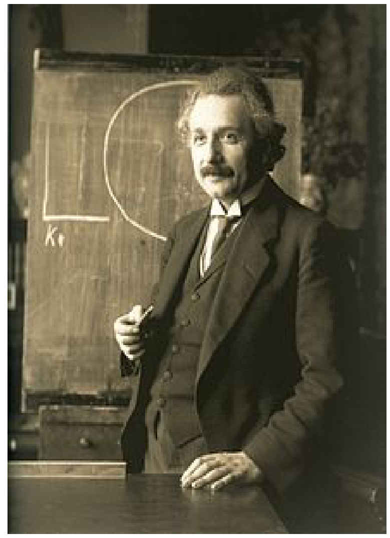
13 הנפשות הפועלות

נציין כאן חלק מהמתמטיקאים שהוזכרו בחוברת, בין אם הופיעו פעמים רבות ובין אם אגב אורחא.

קצרה היריעה מלתאר את פועלו של כל אחד ואחד מהאישים המוזכרים כאן. ויקיפדיה תעשה את העבודה.

"והיו עיניך רואות את מוריך" (ישעיהו ל, כ).

לאונרד אוילר, 1783־1707. מתמטיקאי שווייצרי. מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. תרם תרומה חשובה למרבית התחומים במתמטיקה, וקבע הרבה מדרכי הסימון המודרניות. פרסם מאות רבות של ספרים בימי חייו, ועל אף שהתעוור בשנת 1766 לא הפסיק לכתוב (בשנות העיוורון כתב כמעט מחצית מספריו). על העיוורון חיפה בעזרת יכולת חישובית וזיכרון מרשימים (ואנחנו לא מצליחים לזכור את מקדמי כריסטופל).



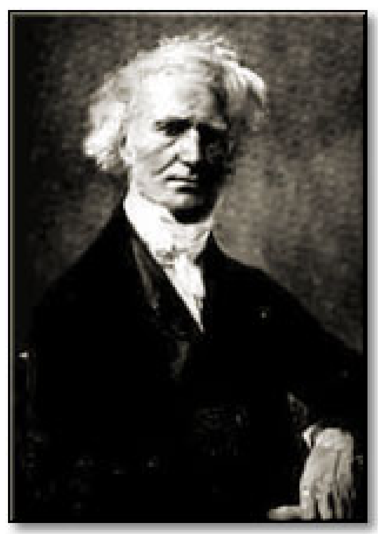
אלברט איינשטיין, 1955־1879. פיזיקאי יהודי גרמני. מגדולי הפיזיקאים ־ הגה את תורת היחסות, תרם למכניקת הקוונטים ולמכניקה הסטטיסטית, וזכה בפרס נובל על הסבר האפקט הפוטו־אלקטרי. דחה הצעה לכהן כנשיאה השני של מדינת ישראל מכיוון שרצה להקדיש את כל כוחותיו למדע.

אלפרד אנפר, 1885־1830. מתמטיקאי גרמני. את עבודת הדוקטורט עשה תחת הנחייתו של דיריכלה באוניברסיטת גטינגן, ובהמשך כיהן בגטינגן כפרופסור. עסק במשטחים מינימליים, בנפרד וביחד עם קרל ויירשטראס.

פייר בונה, 1892-1819. מתמטיקאי צרפתי. עסק בגיאומטריה דיפרנציאלית. למד ולימד באקול פוליטכניק. זכה בשנת 1849 בפרס מהאקדמיה של בריסל. אחיינו של אבא בונה.

אדמונד בור, 1866-1832. מהנדס (כן, מהנדס) צרפתי. למד באקול פוליטכניק בפריז, ואף כיהן שם במשך שנה כפרופסור להנדסה. מת בגיל צעיר עקב מחלה, לאחר שטייל באלג'יריה.

הארי בייטמן, 1882־1946. מתמטיקאי אנגלי. עסק בגיאומטריה, משוואות דיפרנציאליות ואלקטרומגנטיות. לימד באוניברסיטאות של ליברפול ומנצ'סטר לפני שעבר לארה"ב בשנת 1910, שם לימד במספר מוסדות, ביניהם המכון הטכנולוגי של קליפורניה ($Caltech$).



ז'אק פיליפ־מארי בינה, 1786־1856. מתמטיקאי צרפתי. עסק גם בפיזיקה ובאסטרונומיה. תרם רבות לתורת המספרים ולאלגברת המטריצות.

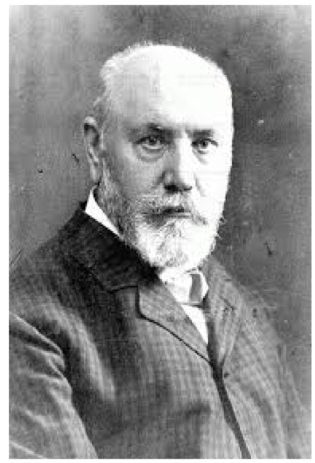
יוג'יניו בלטרמי, 1900-1835. מתמטיקאי איטלקי. עסק בגיאומטריה דיפרנציאלית ובפיזיקה, והניח את היסודות לחשבון הטנזורים. לימד באקדמיה של בולוניה, ובאוניברסיטאות של רומא, פיזה ופאביה.

קרל פרידריך גאוס, 1855-1777. מתמטיקאי גרמני. מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, מכונה "נסיך המתמטיקאים". עסק כמעט בכל תחום מתמטי, ועד היום כל מתמטיקאי חושש שגאוס כבר ענה על השאלות בהן הוא עוסק. מעבר למתמטיקה, עסק גם בפיזיקה ואסטרונומיה. המוטו שלו היה "מעט, אך בשל", והוא הקפיד לא לפרסם עבודות שלא נחשבו

בעיניו למושלמות.

דויד הילברט, 1862־1943. מתמטיקאי גרמני. לימד עשרות שנים באוניברסיטת גטינגן. עסק במתמטיקה, פיזיקה ופילוסופיה. הצעיד במו ידיו את המתמטיקה אל המודרנה בפתח המאה ה־20. ניסח את 23 הבעיות של הילברט, שחלקן נותרו ללא פתרון עד ימינו. הגה את "תכנית הילברט" ־ בניית תורה אקסיומטית יעילה, עקבית ושלמה למתמטיקה כולה (תכנית שנועדה לכישלון, כפי שהוכיח קורט גדל).

וויליאם רואן המילטון, 1865-1805. מתמטיקאי ואסטרונום אירי. עסק באנליזה וקטורית, מכניקה אנליטית ואופטיקה. גילה את אלגברת הקווטרניונים ב־16 באוקטובר 1843; הגילוי ריגש אותו כל כך שהמילטון לא התאפק ובאותו הרגע רצה לכתוב את המשוואה הבסיסית של הקווטרניונים. מכיוון שהיה באמצע טיול בדבלין, חרט את המשוואה עם סכין על גשר ברום. מדי שנה מתקיימת בתאריך זה צעדה במקום, לציון הגילוי.



ארנסט לברכט הנברג, 1933-1850. מתמטיקאי גרמני. כיהן בפרופסור למכניקה באוניברסיטה הטכנולוגית של דארמשטאדט, והיה חבר באגודת המתמטיקאים הגרמנית.

לודוויג אוטו הסה, 1874-1811. מתמטיקאי גרמני. עסק באלגברה ובגיאומטריה. היה

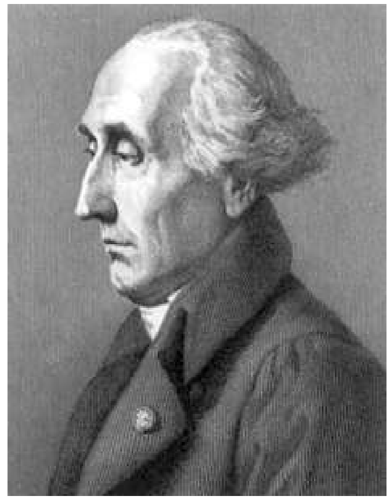
תלמידו של קרל גוסטב יעקובי. לימד באוניברסיטת קניגסברג והיה חבר באקדמיה הבווארית למדעים.

יוליוס וויינגרטן, 1910־1836. מתמטיקאי גרמני. עסק בגיאומטריה דיפרנציאלית של משטחים.

ברוק טיילור, 1731־1685. מתמטיקאי אנגלי, חבר החברה המלכותית למדעים. ידוע בעיקר משפט טיילור וטור טיילור. למד בקיימברידג'.

קרל גוסטב יעקובי, 1851־1804. מתמטיקאי יהודי גרמני. עסק בפונקציות אליפטיות, משוואות דיפרנציאליות ותורת המספרים. היה המתמטיקאי היהודי הראשון לקבל משרת פרופסור באוניברסיטה גרמנית. על שמו נקראת היעקוביאן.

אלווין ברונו כריסטופל, 1900־1829. פיזיקאי ומתמטיקאי גרמני. עסק בגיאומטריה דיפרנציאלית והניח את היסודות לפיתוח חשבון הטנזורים. לימד במוסדות שונים בגרמניה ובצרפת (חי באלזס־לורן). עסק גם באנליזה מרוכבת ואנליזה נומרית.



ז'וזף־לואי לגראנז', 1736-1810. מתמטיקאי איטלקי־צרפתי, מגדולי המתמטיקאים. פיתח ושיכלל ענפים מתמטיים רבים באנליזה, באלגברה, במכניקה אנליטית ועוד. בערוב ימיו אמר לגראנז' שאם היה עשיר, לא היה עוסק במתמטיקה (טוב שלא היה עשיר).

ניקולאי לובצ'בסקי, 1792-1856. מתמטיקאי רוסי. הראשון שניסח מודל של גיאומטריה לא אוקלידית (המישור ההיפרבולי). במקביל לו הגיע גם יאנוש בויאי לתוצאה דומה (וגם גאוס, אך גאוס נמנע מלפרסמה מאותם מניעים שציינו).

סופוס לי, 1842־1899. מתמטיקאי נורווגי. למד באוניברסיטת אוסלו והיה חבר בחברה המלכותית הבריטית. ידוע בזכות חבורות הסימטריה הרציפות שיצר ויישומיהן בגיאומטריה דיפרנציאלית, משוואות דיפרנציאליות ועוד. החבורות נקראות על שמו, חבורות לי.

גוטפריד וילהלם לייבניץ, 1646־1716. מתמטיקאי ופילוסוף גרמני. עסק במגוון תחומים. ייסד (במקביל לניוטון) את החשבון האינפיניטיסמלי. מבחינה פילוסופית היה אופטימיסט, ואף הגדיל לטעון שהעולם בו אנו חיים הוא "הטוב שבעולמות האפשריים" (עולמות אפשריים רבים טוענים שזה לא נכון).

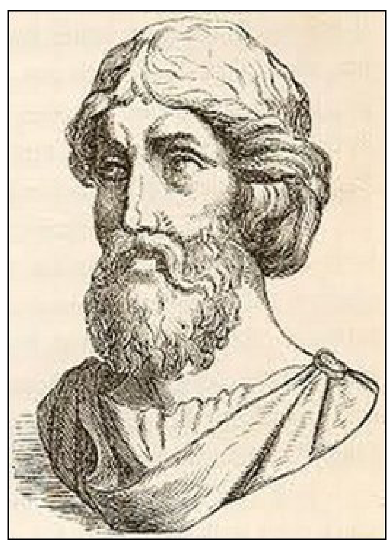
פייר־סימון לפלס, 1827־1749. אסטרונום ומתמטיקאי צרפתי. עסק בתורת ההסתברות ומשוואות דיפרנציאליות. כיהן כפרופסור לאסטרונומיה באקדמיה הצבאית בפריז. נקרא על שמו אסטרואיד. מיוחס לו הפתגם: "*Men have style, gentlemen have class*".

גראררדוס מרקטור, 1594־1512. גאוגרף וקרטוגרף פלמי. שירטט את מפת העולם המפורסמת שלו בשנת 1569. שירטט מספר רב של מפות, ביניהן מפה של ארץ ישראל ומפה של פלנדריה מולדתו.

סמי וסומו, זוג עבריינים.

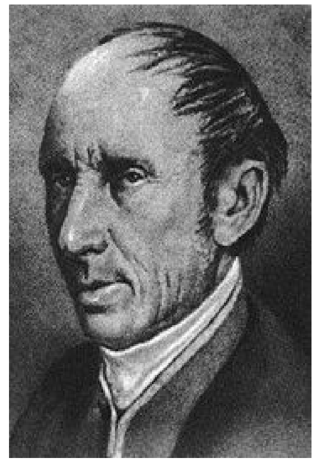
ז'וזף אלפרד סרה, 1819־1895. מתמטיקאי צרפתי. ידוע בעיקר בזכות משוואות פרנה־סרה (פייר? לא מצאתי תמונה נורמלית של פרנה אז יאללה שיהיה סרה).

אנרי פואנקרה, 1854-1912. מתמטיקאי צרפתי. עסק גם בפיזיקה ובפילוסופיה של המדע. מכונה "אחרון האוניברסליסטים", מכיוון שהיה המתמטיקאי האחרון שהצליח להותיר חותם משמעותי בכל תחומי המתמטיקה בתקופתו. לימד במשך רוב הקריירה באוניברסיטה של פריז, הסורבון.

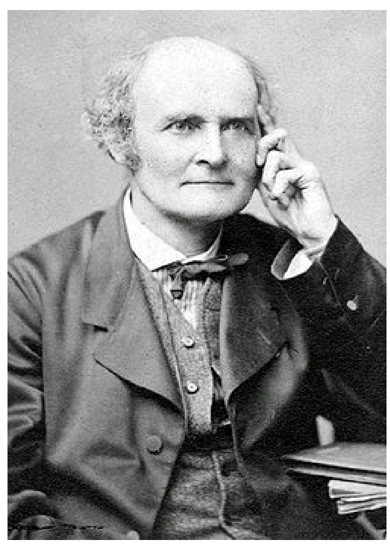


פיתגורס, 582-496 לפנה"ס. מתמטיקאי ופילוסוף יווני. הקים את האסכולה הפיתגוראית, קהילה דתית פילוסופית שהאמינה שאפשר לתאר את כל העולם בעזרת יחסים בין מספרים טבעיים.

האגדה מספרת שחבר האסכולה שגילה מספר לא רציונלי (שאינו ניתן להצגה כיחס בין שני טבעיים) הוצא להורג.



אוגוסטן לואי קושי, 1857-1789. מתמטיקאי צרפתי. מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. עסק בעיקר באנליזה, והיה מאבות הביסוס הריגורוזי של החשבון האינפיניטסימלי. התחיל כמהנדס, אך לגראנז' ולפלס שכנעו אותו לעבור למתמטיקה, למזלה של המתמטיקה.



ארתור קיילי, 1895-1821. מתמטיקאי בריטי. עבד כעורך דין במשך שנים. עסק בגיאומטריה אלגברית ותורת החבורות. היה נשיא האגודה הבריטית לקידום המדע.

לאופולד קרונקר, 1891־1823. מתמטיקאי יהודי גרמני. לקרונקר לא הייתה משרה רשמית באוניברסיטה של ברלין, אך כחבר האקדמיה הייתה לו הזכות להעביר הרצאות באוניברסיטה, והוא אכן עשה זאת. כשברנרד רימן נפטר ב־1866, הוצעה לו משרה בגטינגן, אך הוא החליט להישאר בברלין.

ברנרד רימן, 1866־1826. מתמטיקאי גרמני, מגדולי המתמטיקאים. עסק בעיקר באנליזה ובגיאומטריה דיפרנציאלית, אך תרם כמעט לכל ענפי המתמטיקה בזמנו. אחראי לניסוחה של השערת רימן, כנראה הבעיה הפתוחה הכי חשובה במתמטיקה. נפטר משחפת בהיותו בן ארבעים בלבד.

יעקב שטיינר, 1863-1796. מתמטיקאי שווייצרי. בשנת 1834 השיג קתדרה לגיאומטריה (שנקראה על שמו) שאוניברסיטת ברלין. במשרה זו כיהן עד יום מותו.

היינריך שרק, 1885-1798. מתמטיקאי גרמני. עסק במשטחים מינימליים ובהתפלגות של המספרים הראשוניים. היה המנחה בעבודת הדוקטורט של ארנסט קומר.

איחלתי לחייל בהצלחה.