פתרון תרגיל 8

1. הוכיחו כי אם $N<G$ אזי $Z(N)=\{x\in N \mid \forall y\in N, xy=yx\}$ היא תת חבורה נורמלית של G.

פתרון:

צריך להוכיח שלכל $g\in G$ ולכל $x\in Z(N)$ מתקיים $gxg^{-1}\in Z(N)$.

כדי להראות את זה הוכיח שכל $n\in N$ מתקיים $(gxg^{-1})n(gxg^{-1})^{-1}n^{-1}=e$.

$(gxg^{-1})n(gxg^{-1})^{-1}n^{-1}=gx(g^{-1}ng)x^{-1}g^{-1}n^{-1}=g(g^{-1}ng)xx^{-1}g^{-1}n^{-1}=nn^{-1}=e$.

שימו לב ש- $x(g^{-1}ng)=(g^{-1}ng)x$ כי x מחלף עם כל איבר של N ו- $g^{-1}ng\in N$ כי N היא תת חבורה נורמלית.

2. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A,B<G$. הוכיחו או הפריכו:

א. $G/A\cong G/B$ אם ורק אם $A=B$.

פתרון:

ניקח $G=Z_2\times Z_2$, $A=\{0\}\times\{0,1\}$, $B=\{0,1\}\times\{0\}$ ומתקיים הנדרש.

ב. $G/A\cong G/B$ אם ורק אם $A\cong B$.

פתרון:

$G=Z_4\times Z_2$, $A=\{(00),(2,0)\}$, $B=\{(0,0),(0,1)\}$.

ג. אם $G\cong G/A$ אזי A היא תת החבורה הטריוויאלית.

פתרון:

ניקח $G=C^*$, $f:C^*\to C^*$ המקיימת $f(x)=x^2$. אזי עבור $A=\ker(f)=\{1,-1\}$ מתקיים $G\cong G/A$, בעוד ש- A אינה טריואלית.

3. נתבונן בחבורה S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6:\sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

הוכיחו ש- H היא תת חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?

הוכחה:

ההוכחה ש- H היא תת חבורה קל להוכיח לפי ההגדרה. H לא מזיזה את המספרים 2,4,6 ולכן ניתן להסתכל על התמורות שלה כעל על תמורות של המספרים $\{1,3,5\}$, לכן $H\equiv S_3$. H אינה תת חבורה נורמלית שכן התמורה $(135)\in H$ אך התמורה הצמודה לה $(124)\notin H$.

4. תהיינה $A,B,C < G$ כך ש- $A \subseteq B$. הוכיחו ש- AC/BC היא חבורת מנה של A/B. (
רמז: היעזרו במשפט האיזומורפיזם)

פתרון:

ראשית שימו לב שמנתוני השאלה $B < A$ שכן $B < G$ וגם $B \le A$.

כמו כן, מהתנאי $A,B,C < G$ נקבל $AC, BC < G$, וכך ש- $B \le A$ נסיק ש- $BC \le AC$

ולכן $BC < AC$. מכאן ש- A/B ו- AC/BC אכן חבורות.

נמצא אפימורפיזם $f : A/B \to AC/BC$ ואז ממשפט האיזומורפיזם נקבל ש-