תרגול 1 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

אטומים ופרדיקטים:

הגדרה (לא פורמאלית): השפה העברית מורכבת ממשפטים. המקבילה בשפה המתמטית נקראת "פסוק". האטומים הם חלק מאבני היסוד של הפסוקים.

לדוגמה: הפסוק "שנת הלימודים החלה ויש 5 קורסים בשנה א'" מורכב משני אטומים־"שנת הלימודים החלה" ו"יש 5 קורסים בשנה א'" (שני האטומים מקשורים ע"י וו החיבור).

בניגוד לאטומים שהם ללא משתנים הפרדיקטים הינם פונקציות התלויות במשתנים.

לדוגמה, ניתן להגדיר את הפרדיקט $S(x)$ להיות x הינו סטודנט באוניברסיטה.

גם אטומים וגם פרדיקטים יכולים להיות אמיתיים (מסמנים 1 או T) או שקריים (מסמנים 0 או F).

המינוח המקובל הוא שאטום/פרדיקט הוא בעל ערך אמת T (במידה שהוא נכון) או בעל ערך אמת F (במידה שאינו נכון).

כיוון שאטומים הם ללא משתנים, הם יכולים להיות T או F אבל לא שניהם.

לעומתם, פרדיקטים הם תלויים במשתנים ולכן ערך האמת שלהם יקבע לפי ההצבה במשתנים.

למשל, הפרדיקט $S(x,y) = x < y$ יהיה נכון במקרה ש $S(2,3)$ ולא נכון במקרה ש $S(3,2)$.

על מנת לבנות פסוקים יותר מורכבים משתמשים בקשרים וכמתים.

קשרים וכמתים:

הגדרה: יהיו A, B אטומים (או פרדיקטים) היכולים להיות אמת (1) או שקר (0), אזי

הקשרים:

1. גרירה: $A \to B$
2. או: $A \vee B$
3. וגם: $A \wedge B$
4. שלילה: $\neg A$

מוגדרים ע"י טבלת האמת הבאה:

A	B	$A \to B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

קשר נפוץ נוסף הוא גרירה דו־כיוונית:

$$A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A)$$

מינוח:

1. כאשר אומרים ש־A הוא תנאי הכרחי ל־B פירושו הוא $B \to A$.
2. כאשר אומרים ש־A הוא תנאי מספיק ל־B פירושו הוא $A \to B$.
3. כאשר אומרים ש־A הוא תנאי הכרחי ומספיק ל־B פירושו הוא $A \leftrightarrow B$.

הקשרים "וגם" ו"או" מקיימים מספר תכונות:

1. קיבוציות (אסוציאטיביות):

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

2. חילופית (קומוטטיביות):

$$A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A$$

3. פילוג (דיסטריביוטיביות):

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

נאמר שפסוקים הם שקולים אם יש להם את אותה טבלת אמת, כלומר אם הם מקבלים את אותם ערכי אמת ושקר.

למשל:

$$\neg(\neg A) \equiv A$$

כלומר, שלילה כפולה שקולה לחיוב. אם ניתן דוגמה משפת הדיבור, הפסוק "לא לא הלכתי לישון" בעצם אומר "הלכתי לישון".

דוגמה נוספת לשקילות:

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

כלומר, אם א' גורר את ב' אז לא ב' גורר את לא א'.

אם ניתן דוגמה משפת הדיבור, הפסוק "אם סטודנט למד כמו שצריך למבחן אז הוא לא ייכשל" שקול לפסוק "אם סטודנט נכשל במבחן אז הוא לא למד כמו שצריך".

כדי לבדוק שקילות בין פסוקים, נבדוק מהם ערכי האמת שלהם בעזרת טבלת אמת. אם טבלאות האמת זהות, הם שקולים.

בנוסף לקשרים, יש לנו את הכמתים:

1. הכמת $\exists$ פירושו קיים.
2. הכמת $\forall$ פירושו לכל.

איך שוללים טענות עם כמתים?

ההיפך של "לכל" הוא "קיים כך שלא". למשל, ההיפך של הטענה "כל הנחלים הולכים אל הים" היא הטענה "קיים נחל שלא הולך אל הים".

חשוב לשים לב! ההיפך **אינו** "כל הנחלים לא הולכים אל הים".

ההיפך של "קיים" הוא "לכל זה לא". למשל, ההיפך של הטענה "קיים עץ אחד שהוא שלי" היא הטענה "כל העצים לא שלי".

בכתיב מתמטי זה יראה כך:

$$\neg(\forall x S(x)) \equiv \exists x(\neg S(x))$$

$$\neg(\exists x S(x)) \equiv \forall x(\neg S(x))$$

הצרנה:

הצרנה היא כתיבת טענות באופן פורמלי.

איך עושים זאת? כל פסוק מסמנים באות כלשהי, ואת הקשרים והכמתים בהתאם למה שראינו.

<u>לדוגמה:</u>

"אם סטודנט עייף אז הוא לא מקשיב בשיעור".

נסמן ב$-A$ "סטודנט עייף" ונסמן ב$-B$ "מקשיב בשיעור" ונקבל:

$$A \to \neg B$$

"כאשר אני עייף ורעב אני נעשה עצבני או שאני הולך לישון, אך אם אני עצבני ולא עייף אז אני רעב".

נסמן ב$-A$ "אני עייף", B אני רעב, C אני עצבני, D הולך לישון. נקבל:

$$((A \wedge B) \to (C \vee D)) \wedge ((C \wedge \neg A) \to B)$$