מבוא להסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 5

ניסוי ברנולי - התפלגות בינומית

ניסוי בודד הוא "הצלחה" מתקבלת בהסתברות p
ו"כישלון" בהסתברות $q=1-p$ נקרא ניסוי ברנולי.

כאשר מבצעים n ניסויי ברנולי, בלתי תלויים זה בזה,
שבכולם הסי להצלחה $=p$, ונרצה לחשב את ההסתברות
ל k הצלחות נקבל את ההתפלגות הבינומית.
ההסתברות ל k הצלחות נתונה ע"י נוסחת ברנולי
(עש יעקוב ברנולי)

$$P(\text{k הצלחות מתוך n ניסיונות}) = P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

הערה: שימו לב כי ניתן להשתמש בהתפ' בינומית רק
אם הסי להצלחה בכל ניסוי בודד שווה לאותו ערך.
ולכן בשאלות הוראה מכך וכו' יש לשים לב כי יש חזרה!

הסבר לנוסחה:

$$\underbrace{\frac{\text{כשלון}}{q} \cdot \frac{\text{הצלחה}}{p} \cdot \frac{\text{כשלון}}{q} \cdot \frac{\text{כשלון}}{q} \cdot \frac{\text{כשלון}}{q} \cdots \frac{\text{הצלחה}}{p}}_{\text{n ניסיונות}}$$

מכפל ההסתברות (אי תלוי)

$$pqqqpq\cdots$$

$$p^k q^{n-k}$$

להבחירה של תתי קבוצות
מגודל k מתוך n
היא $\binom{n}{k}$ צירופים

Scanned by CamScanner

בנוסף, נשים לב כי:

$k=0 \rightarrow$ אין הצלחות

$k=1 \rightarrow$ הצלחה אחת

$\vdots$

$k=n \rightarrow$ n הצלחות

"פורש" את כל האפשרויות במרחב המדגם ולפי טריאנגל הנהלה הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$$

הוכחה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \underset{\text{הבינום של ניוטון}}{=} (p+q)^n = 1^n = 1$$

לא משנה מה יוגדר כהצלחה שכן:

טענה:

$$P\left(\begin{matrix}\text{k הצלחות}\\ \text{מתוך } n\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{n-k כישלונות}\\ \text{מתוך } n\end{matrix}\right)$$

הצלחה בהס' p — כישלון בהס' $q=1-p$

הוכחה:

$$P\left(\begin{matrix}\text{n-k כישלונות}\\ \text{מתוך } n\end{matrix}\right) = \binom{n}{n-k} q^{n-k} p^{n-(n-k)} =$$

$$= \binom{n}{k} q^{n-k} p^k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = P\left(\begin{matrix}\text{k הצלחות}\\ \text{מתוך } n\end{matrix}\right)$$

Scanned by CamScanner

2

תרגיל: 30% מתושבי עיר כלשהי גרים בבתים פרטיים ו-70% גרים בבתים משותפים.
ידוע כי מספר התושבים ממין נקבה גדול פי $1\frac{2}{9}$ ממספר התושבים ממין זכר.
60% מבין התושבים הגרים בבתים פרטיים הם ממין נקבה.
בוחרים באקראי 8 תושבים:

א. מה הסתת ש $\frac{1}{4}$ מהתושבים שנבחרו גרים בבתים פרטיים ו $\frac{3}{4}$ בבתים משותפים?

ב. " " שבדיוק 5 מן התושבים הם ממין זכר הגרים בבתים משותפים?

פתרון: נסמן A - בית פרטי $\bar{A}$ - בית משותף
B - זכר $\bar{B}$ - נקבה

$P(A)=0.3$ $\qquad P(\bar{B})=1\frac{2}{9}P(B)$

$P(\bar{B}|A)=0.6$ $\qquad 1-P(B)=1\frac{2}{9}P(B)$

$\Downarrow$

$P(B)=0.45$

$P(\bar{B}\cap A)=0.6\cdot 0.3=0.18$

	$\bar{B}$	B	
0.3	0.18	0.12	A
0.7	0.37	0.33	$\bar{A}$
1	0.55	0.45	

א. ברנולי $k=\frac{1}{4}\cdot 8=2$ $\quad n=8$ $\quad p=P(A)=0.3$

$P(\text{מתוך } 8 \text{ 2})=\binom{8}{2}0.3^2\,0.7^6=\boxed{0.2965}$

ב. ברנולי $k=5$ $\quad n=2$ $\quad p=P(\bar{A}\cap B)=0.33$

$P(\text{מתוך } 8 \text{ 5})=\binom{8}{5}\cdot 0.33^5\cdot 0.67^3=\boxed{0.0659}$

Scanned by CamScanner

תרגיל: נתונה קוביה בה 2 פאות הן אדומות 4 לבנות

א. מורקים את הקוביה 3 פעמים. מהי ההסתברות שבכל 3 הטריקות נקבל אותו דבר?

ב. מורקים 4 קוביות כנ"ל, כל אחת 3 פעמים. מהי ההסתברות שבדיוק על 2 קוביות מתוך 4 יקבל בכל 3 הטריקות אותו דבר?

פתרון: נסמן A אדום B לבן

א.

$$P(\text{אדום} \cap \text{אדום} \cap \text{אדום}) + P(\text{לבן} \cap \text{לבן} \cap \text{לבן}) =$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ב.

$$P\left(\begin{matrix}2\\ \text{מתוך}\\ 4\end{matrix}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \boxed{\frac{8}{27}}$$

תרגיל: כדי לעבור קורס יש להקליד ב"מבחן" לפחות אחד מבין 2. הסי להקליד בראשון 0.25 ובשני 0.6. בוחרים באקראי 4 סטודנטים.

א. מה ההס' שסטודנט בודד יעבור?

ב. " " שלפחות 2 סטודנטים ולא יותר מ 4 מבין ה 5 יעברו?

פתרון:

$$P(\text{סטודנט עבר}) = P(\text{עבר בשני} \cap \text{בראשון}) + P(\text{עבר בשני} \cap \text{בראשון}) + P(\text{נכשל בשני} \cap \text{בראשון})$$

$$\overset{\text{אי}}{=} 1 - P(\text{נכשל בשני} \cap \text{נכשל בראשון}) = 1 - 0.25\cdot 0.4 = \boxed{0.9}$$

ב.

$$\binom{5}{2}0.9^2 0.1^3 + \binom{5}{3}0.9^3 0.1^2 + \binom{5}{4}0.9^4 0.1^1 = \boxed{0.40905}$$

Scanned by CamScanner

(3)

הוצאה עם החזרה

תרגיל: בכד 3 כדורים אדומים ו-5 כחולים.

א. מוציאים באקראי עם החזרה 8 כדורים. חשב:

(1) 3 מהן הכדורים אדומים

(2) 5 " " אדומים

(3) לפחות 3 ולא יותר מ- 5 אדומים.

ב. מוציאים באקראי עם החזרה n כדורים. הבע באמצעות n את הסיכוי שבדיוק כדור אחד הוא אדום.

פתרון:

$$P(\text{אדום}) = \frac{3}{8}$$

(1)
$$\binom{8}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^5 = 56\cdots = 0.2816$$

(2)
$$\binom{8}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^5\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \cdots = 0.1014$$

(3)
$$\binom{8}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^5 + \binom{8}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{5}{8}\right)^4 + \binom{8}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^5\left(\frac{5}{8}\right)^3$$

$$= (1) + (2) + (*) = 0.5942$$

ב.
$$\binom{n}{1}\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = n\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5^{n-1}}{8^{n-1}} = \boxed{\frac{3n\cdot 5^{n-1}}{8^n}}$$

Scanned by CamScanner

ברנולי - נאלנים

תרגיל: בניסוי מסוים הסי להצלחה p $(0<p<1)$.
ידוע כי אם עורכים 4 ניסויים, אז הסי של הארבעה יסתיימו בהצלחה גדול פי 16 מסי של האחרונה בכשלון.
אם תשב את p

בס עורכים את הניסוי n פעמים. הבע באמ n:
(1) את הסתי שהניסוי יצליח בדיוק פעם אחת.
(2) " " " " $n-1$ פעמים.

פתרון:

א.

$$\binom{4}{4}p^4(1-p)^0 = 16\binom{4}{0}p^0(1-p)^4$$

$$p^4 = 16(1-p)^4$$

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)^4 = 16 \Rightarrow \frac{p}{1-p} = 2$$

$$p = 2-2p \qquad 3p = 2$$

$$\boxed{p = \frac{2}{3}}$$

ב.

$$\binom{n}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{2n}{3^n}}$$

ג.

$$\binom{n}{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \boxed{\frac{n\cdot 2^{n-1}}{3^n}} \text{ או } \frac{1}{3}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Scanned by CamScanner

(4)

ברנולי + מיתון

תרגיל

הם שקלו פוגע במטרה ביריה בודדת 0.9.
הקלע ירה 6 יריות. בהנתן שפגע לפחות
ב-4 מהיריות, חשב הסת':

א. שפגע לכל היותר ב 4 מהיריות.

ב. " " " ב-5 מהיריות.

א. $P(\text{פגע לכל היותר 4} \mid \text{פגע לפחות 4 מתוך 6}) = \frac{P(\text{חיתוך})}{P(\text{פגע לפחות 4 מתוך 6})} = \frac{P(\text{פגע 4 בדיוק})}{P(\text{לפחות 4})} =$ פתרון

$$= \frac{\binom{6}{4}0.9^4 0.1^2}{\binom{6}{4}0.9^4 0.1^2 + \binom{6}{5}0.9^5 0.1^1 + \binom{6}{6}0.9^6 0.1^0} =$$

(15) (6)

$$= \frac{0.098415}{0.98415} = \boxed{0.1}$$

ב. $$\frac{\binom{6}{4}0.9^4 0.1^2 + \binom{6}{5}0.9^5 0.1^1}{\dots} = \boxed{0.46}$$

Scanned by CamScanner

שני התפלגויות בינומיות

תרגיל: יצוא ש איסוף מתושבי מדינה מסוימת מרכבים משקפיים.
בוחרים באקראי 10 תושבים ומחלקים לפי 2 קבוצות שבכל אחת 5 תושבים. חשב:

א. הסתברות שמתוך 10 תושבים בדיוק 4 מרכבי משקפיים.

ב. שבכל אחת מהקבוצות ש 5 יש בדיוק 2 מרכבי משקפיים.

פתרון: א.

$$\binom{10}{4} 0.2^4 \, 0.8^6 = 210 \cdot 0.0016 \cdot 0.262144 = \boxed{0.08808}$$

ב.

$$\left[\binom{5}{2} 0.2^2 \cdot 0.8^3\right]^2 = 0.2048^2 = \boxed{0.04194}$$

תשוב להסביר לתלמידים את ההבדל!

Scanned by CamScanner