הרצאה VII- אינפי 1

נחזור כעת לגבולות חלקיים : תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ ל$\{x_n\}$ אם $n_k\to\infty$ או שמתקיים $n_k \nearrow$.

למה : $n_k\to\infty$ של $\{x_{n_k}\}$ אזי קיימת $\{x_{n_{k_i}}\}$ כך ש$\nearrow n_{k_i}$.

הוכחה : n_k=n_{k_i}. ו$\infty\to n_k$ אזי $\exists n_{k_2}>n_{k_1}$ ... אם בנינו $x_{n_{k_i}}$ אזי קיים $x_{n_{k_{i+1}}}$ כך ש שמתקיים $x_{n_{k_{i+1}}}>x_{n_{k_i}}$.

משפט: אם קיים גבול $\lim_{n\to\infty} x_n=l\in\overline{\mathbb{R}}$ אזי לכל סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתקיים $n_k\to\infty$ קיים גבול $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l$. ז״א גבול של סדרה שווה לכל גבול חלקי שלה.

הוכחה : נקבע $\varepsilon>0$ ואז מתקיים $\exists\bar{n}\forall n\ge\bar{n}: x_n\in U_\varepsilon(l)$, ועי״פ הגדרה $\exists\bar{k}\forall k\ge\bar{k}$ וגם $n_k\ge\bar{n}$. לכן $x_{n_k}\in U_\varepsilon(l)$. קיבלנו כי מתקיים $\exists\bar{k}\forall k\ge\bar{k}: x_{n_k}\in U_\varepsilon(l)$ ועי״פ הגדרה זה אומר כי $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l$. משל.

משפט : תהי $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ כך שלכל תת קבוצה שלה קיים גבול $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l\in\overline{\mathbb{R}}$ אזי קיים $\lim_{n\to\infty} x_n=l$.

הוכחה : נניח בשלילה כי $\exists\varepsilon>0\ \forall\bar{n}\ \exists n\ge\bar{n}\ x_n\notin U_\varepsilon(l)$ נבחר $\bar{n}=1$ ואז קיים $x_{n_1}\notin U_\varepsilon(l)$. וכעת נבחר חדש $\bar{n}=n_1+1$ ולכן מתקיים כי $\exists n_2: x_{n_2}\notin U_\varepsilon(l)$ וכך נמשיך עד שנקבל סדרה שעולה מונוטונית ומקיימת כי$x_{n_k}\notin U_\varepsilon(l)$ לכל k. ז״א $x_{n_k}\nrightarrow l$.

יחס בין גבול עליון לגבול תחתון :

הגדרנו בהרצאות קודמות : $\lim_{n\to\infty} L_n:=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\lim_{n\to\infty}\sup x_n$, וגם $\lim_{n\to\infty} l_n:=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\inf x_n$.

משפט: אם קיים גבול $l\in\overline{\mathbb{R}}$ חלקי של $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ אז $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\le l\le\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

הוכחה : קיימת תת סדרה x_{n_k} כך ש $x_{n_k}\to l$. ואז מתקיים כי $l_{n_k}\le x_{n_k}\le L_{n_k}$ ואז $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\le l\le\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

משפט : $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ הם גבולות חלקיים

הוכחה : $L_n:=\sup\{x_n,x_{n+1},\ldots\}$ ואז לכל k מתקיים $\exists n_k: L_k-\frac{1}{k}<x_{n_k}<L_k$ ואז קיים $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\lim_{k\to\infty} L_k=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

ואז קיימת תת סדרה $\{x_{n_{k_i}}\}\subset\{x_{n_k}\}$ כך ש$\nearrow n_{k_i}$ ואז $\lim_{k\to\infty} x_{n_{k_i}}=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ואז ע״ם הגדרת הגבול החלקי קיבלנו את הדרוש. משל.

מסקנה : $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\max\{\text{גבולות חלקיים}\}$ וגם $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\min\{\text{גבולות חלקיים}\}$.

משפט הבחירה של *Weierstrass*

משפט: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה המתכנסת. כלומר אם $|x_n|\le M$ אזי קיים גבול $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l$ ממשי.

הוכחה : עי״פ הגדרה מתקיים $-M\le\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\le\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n\le M$ ואז הגבולות ממשיים וסופיים, ולפי משפט קיימת תת קבוצה $\{x_{n_k}\}$ כך ש $x_{n_k}\to\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ וממשי.

למה של קנטור (*Cantor*) על קטעים:

נתונה סדרה $\{[a_n,b_n]\}$ כך ש$\{[a_{n+1},b_{n+1}]\} \subset \{[a_n,b_n]\}$ אזי קיים $c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ ואם $|a_n-b_n| \to 0$ אז הנקודה c היא יחידה ומתקיים כי $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. a_n עולה מונוטונית וb_n יורדת מונוטונית. $a := sup a_n \le inf b_n := b$ ולכן , ע״פ מה שהגדרנו, $a_n \le \mathrm{a} \le \mathrm{b} \le b_n$. באופן כללי, הדבר הוכח בתרגיל בית..

מבחן קושי (*Cauchy Test*)

הגדרה: אומרים שהסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (פונדמנטלית) אם מתקיים התנאי: $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n,m \ge \bar{n}: \ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

משפט: הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אוי״א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע״פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \ge \bar{n}: |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי ע״פ אי השיוויון המשולש $|x_n - x_m| = |(x_n - l)-(x_m - l)| \le |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע״פ הגדרה.

בכיוון השני $\Rightarrow$: נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע״פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n,m \ge \bar{n}: \ |x_n - x_m| < \varepsilon$ ע״פ הגדרת הערך מוחלט, והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נקבע כי $n \ge \bar{n}, m = \bar{n}, n \ge N, N \ge \bar{n}$.

ואז נקבל כי $x_m - \varepsilon \le inf\{x_n\} \le sup\{x_n\} \le x_m + \varepsilon$ ואז $x_m - \varepsilon \le \underline{lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le x_m + \varepsilon$ ואז נקבל כי מתקיים $0 \le \underline{lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le 2\varepsilon$ אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח ש$\underline{lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $\underline{lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l = lim_{n\to\infty} x_n$.

דוגמא 1: $x_k := \sum_{k=1}^{n} \sin(k!) q^k$ כאשר $|q| < 1$. נוכיח כי הסדרה מתכנסת לפי מבחן קושי:

לפי מה שהגדרנו: $|x_n - x_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k!)\, q^k - \sum_{k=1}^{m} \sin(k!)\, q^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \sin(k!)\, q^k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |\sin(k!)| |q|^k$

$\le |q|^{n+1} \frac{1-|q|^{m-n}}{1-|q|} \le \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} \to 0$. וע״פ הגדרה מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n,m \ge \bar{n}: \ |x_n - x_m| \le \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon$. משל.

דוגמא 2: $x_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$. נוכיח כי הסדרה אינה סדרת קושי ולכן אינה מתכנסת. $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ולכל ε שקטן מ$\frac{1}{2}$ אין הדבר מתקיים, לכן הסדרה לא סדרת קושי ולכן אינה מתכנסת. נקרא לטור מסוג זה טור הרמוני. וכפי שהוכחנו, גבולו יהיה $(Harmonic\ Series)$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

דוגמא 3: מהו הגבול של הסדרה הבאה: $x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 + \frac{2-1}{2} + \cdots + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cdots +$ $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ונקבל כי $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ וע״פ אריתמטיקה של גבולות: $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

דוגמא 4: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} =?$, מדובר בסדרה: $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \le 2$, עולה מונוטונית וחסומה מלעיל, ע״פ משפט קיים גבול סופי, הסדרה מתכנסת, ואוילר בעבר הוכיח כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, אך אין בידינו כלים כדי להוכיח זאת.

דוגמא 5: נכלל את דוגמא ארבע: $(p \ge 2)$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} =?$, הסדרה עולה מונוטונית, ומתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2$ ולכן חסומה מלעיל וקיים גבול סופי ע״פ משפט. (אותו לא נחשב)