פתרון תרגיל 4

תזכורת:

1) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתכנסת

2) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת

3) סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

שאלה 1

תהי a_n סדרה נתונה ע"י נוסחאות נסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$ כאשר $a_1, c>0$. הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

הדרכה:

אם קיים גבול לסדרה, נסמנו ב־L, אזי מתקיים $L=\sqrt{L+c}$, מצאו שני פתרונות למשוואה: $L_1=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$, $L_2=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. קודם כל נפסול את הפתרון L_1 וההסבר לכך הוא שכל איברי הסדרה הם חיוביים ולכן הגבול חייב להיות אי שלילי, L_1 אי שלילי כאשר $0<1+4c<1$ מה שגורר שזה קורה עבור $-\frac{1}{4}<c<0$, אבל לפי הנתון $c>0$ ולכן זו סתירה. נסמן $L=L_2$.

נחלק למקרים:

* אם $a_1>L$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית יורדת וכיוון שהיא חסומה מלרע ע"י אפס היא היא מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* $a_1<L$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה כמו כן, נוכיח באינדוקציה שהיא חסומה מלעיל ע"י L, ולכן מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* אם $a_1=L$, קל לוודא כי הסדרה היא קבועה L

(נמקו למה)

פירוט של הוכחה באינדוקציה עבור מקרה $a_1 < L$:

נוכיח באינדוקציה שהסדרה היא מונוטונית עולה.

* בסיס אינדוקציה : עלינו להוכיח ש־$a_2 > a_1$, כלומר עלינו להוכיח את אי שוויון הבא: $a_2 = \sqrt{a_1 + c} > a_1$. נמצא את כל הפתרונות לאי השוויון עבור המשתנה a_1.נמצא את כל הפתרונות עבור לאי שוויון עבור המשתנה a_1, ונגלה שהוא מתקיים במקרה שלנו כיוון ש־$0 < a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: כעט יהי n, עבורו $a_n < a_{n+1}$.

עלינו להוכיח כי $a_{n+1} < a_{n+2}$, כלומר, עלינו להוכיח כי $\sqrt{a_n + c} < \sqrt{a_{n+1} + c}$, אך זה נובע בקלות לפי הנחת האינדוקציה, משום ששני הביטויים חיוביים, נעלה את שניהם בריבוע ונקבל $a_n < a_{n+1}$ וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

נותר לנו להוכיח כי הסדרה חסומה מלעיל ע"י L, גם את זה נוכיח באינדוקציה:

* בסיס האינדוקציה: טריביאלי, כיוון שאנו עוסקים במקרה בו $a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור n כלומר $a_n < L$.

נרצה להוכיח את אי שוויון הבא: $\sqrt{a_{n-1} - c} < L$. אי שוויון זה נכון אם ורק אם: $a_n + c < \frac{\left(\sqrt{4c+1}\right)^2}{4}$ אם ורק אם $a_n < \frac{\left(\sqrt{4c+1}+1\right)^2}{4} - c = \frac{4c+1+2\sqrt{1+4c}+1-4c}{4} =$ $L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

סה"כ לכל ערכי $c > 0$ ולכל ערכי $a_1 > 0$ מתקיים כי $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

הוכחה עבור מקרה $a_1 > L$.

נוכיח באינדוקציה הסדרה היא מונוטונית יורדת:

* בסיס האינדוקציה: $a_2 < a_1$ אם ורק אם $\sqrt{a_1 + c} < a_1$ אי שוויון מתקיים אם ורק אם $L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} < a_1$ וזה בדיוק המקרה שלנו.

* הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור n כלומר $a_{n+1} < a_n$

נוכיח עבור $n+1$: רוצים להוכיח $a_{n+2} < a_{n+1}$ זה מתקיים אם ורק אם $\sqrt{a_{n+1} + c} < \sqrt{a_n + c}$ אם ורק אם $a_{n+1} < a_n$ וזה נכון לפי הנחת האינדוקציה.

מקרה $a_1 = L$:

אנו טוענים שבמקרה הזה a_n היא סדרה קבוע L, אפשר לראות את זה באינדוקציה:

* עבור $n=2$: אם $a_2 \neq L$ אזי ללא הגבלת הכלליות נניח ש־$a_2 > L$ ואז $\sqrt{a_1+c} = L < \sqrt{L+c}$ ואז $L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ אינו מקיים את אי השוויון. אותו דבר אם נניח ש־$a_2 < L$ ולכן בהכרח $a_2 = L$.

* נניח נכונות עבור n כלומר נניח ש־$a_n = L$ ונוכיח ש־$a_{n+1} = L$, אבל זה נכון משום שאחרת, כמו במקרה עבור $n=2$ נקבל ש־$L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ אינו מקיים את אי שוויון.

שאלה 2

תהי הסדרה a_n הנתונה ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ כאשר $a_1 > 0$, הוכיחו כי $lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הדרכה:

דבר ראשון, נראה כי הסדרה היא מונוטונית עולה $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0$ (משום ש־$a_1 > 0$, בעזרת אינדוקציה קל לראות שזה אכן נכון)

כעט נניח שהסדרה חסומה אזי מתכנסת לגבול ממשי L. כיוון ש: $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, נקבל את המשוואה הבאה $L + \frac{1}{L} = L$ ולכן $\frac{1}{L} = 0$ שזה כמובן לא ייתכן. לכן לסדרה מונוטונית עולה אין גבול ולכן היא מתכנסת במובן הרחב ל־∞.

שאלה 3

הוכיחו כי הסדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$.

פתרון:

נראה שהסדרה מונוטונית יורדת:

אם $a_{n+1} - a_n \leq 0$ היא יורדת

אם $a_{n+1} - a_n \geq 0$ היא עולה

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3}$$

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

לאחר חיסור נקבל: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} = 0$.

קיבלנו ש־a_n מונוטונית יורדת. בנוסף a_n היא סדרה של מספרים חיוביים ולכן חסומה מלרע ע"י 0 ולכן מתכנסת.

שאלה 4

היה $0 < c < 1$. נגדיר סדרה ע"י תנאי ההתחלה $a_1 = c$ ונוסחת הנסיגה

$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון:

ראשית רואים שהסדרה חסומה מלרע ע"י 0 משום שאיבר הראשון בסדרה חיובי וכל איבר אחר היא סכום של 2 מספרים חיוביים. כעט נוכיח באינדוקציה כי הסדרה מונוטונית יורדת כלומר $a_n - a_{n-1} \leq 0$.

* בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ מתקיים $a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} - c = \frac{c^2}{2} - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} - 1\right) \leq 0$. אי שוויון האחרון נכון משום ש־$0 < c < 1$.

* החנחת האינדוקציה נניח נכונות עבור n

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n+1$: $a_{n+1} - a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - \frac{c}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2} = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2} \leq 0$.

כאשר אי השוויון האחרון נכון לפי הנחת האינדוקציה. הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן היא נתכנסת. לכן קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־$a_n \to L$, אזי

$$L = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}\right) = \frac{c}{2} + lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{L^2}{2}$$

קיבלנו משוואה ריבועית: $L^2 - 2L + c = 0$ ולכן $L_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{2}}$. פתרון $1 + \sqrt{1 - \frac{c}{2}}$ נפסל משום שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$a_n \leq 1 < 1 + \sqrt{1 - \frac{c}{2}}$, ולכן הגבול חייב להיות $1 - \sqrt{1 - \frac{c}{2}}$.