(88132) חשבון אינפינטסימלי 1 | מבחן תשע"ח מועד ב'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

הוכח שכל פונקציה רציפה בקטע סגור, חסומה בקטע.

הערה: כמובן, אין להסתמך על המשפט שכל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בו מקסימום ומינימום. :)

נוכיח כי פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה שם

<u>הוכחה</u> תהי f רציפה ב$[a,b]$ נניח בשלילה שהקב' $\{f(x)|a\leq x\leq b\}$ אינה חסומה מלעיל (מלרע דומה)
לכל n ניקח x_n בקטע כך ש $n\leq x_n$ אז $f(x_n)\to\infty$, אבל $a\leq x_n\leq b$, סדרה חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת
$x_{n_k}\to c$ ומרציפות $\infty\leftarrow f(x_{n_k})\to f(c)$ בסתירה.

שאלה 2

נתון הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)^n.$$

מצא את הערכים של α שעבורם הטור מתכנס בהחלט, הערכים שעבורם הטור מתכנס בתנאי, והערכים שעבורם הטור מתבדר.

ננסה לראות בעבור אלה ערכים הוא מתכנס בהחלט, נפעיל מבחן השורש על טור הערכים המוחלטים.

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)^n\right|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left|\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right|\to\left|\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right|$$

פותרים את אי השיוויון $\left|\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right|<1$ ורואים כי בתחום $\boldsymbol{-\frac{1}{3}<\alpha<1}$ הוא **מתכנס בהחלט**.

במקרה $\boldsymbol{\alpha=-\frac{1}{3}}$ מדובר בטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ אשר **מתכנס בתנאי** על פי לייבניץ

במקרה $\boldsymbol{\alpha=1}$ מדובר בטור ההרמוני אשר **מתבדר**.

נבדוק את שאר התחומים

בעבור $\boldsymbol{\alpha>1}$, הסדרה כלל לא מתכנסת לאפס ולכן **מתבדר**.

נותר לבדוק את המקרה $\alpha<-\frac{1}{3}$

נחלק שוב למקרים:

אם $\boldsymbol{\alpha<-1}$: $\frac{2\alpha}{\alpha+1}>0$ וראינו שלא מתכנס בהחלט, זהו טור חיובי ולכן **מתבדר**.

אם $\alpha=-1$ לא מוגדר כלל

נבדוק $\boldsymbol{-1<\alpha<-\frac{1}{3}}$, אבל בתחום זה $\frac{2\alpha}{\alpha+1}<-1$ ושוב הסדרה כלל לא מתכנסת לאפס ולכן **מתבדרת.**

לסיכום:

$\alpha\geq 1$: מתבדר

$-\frac{1}{3}<\alpha<1$: מתכנס בהחלט

$\alpha=-\frac{1}{3}$: מתכנס בתנאי

$-1<\alpha<-\frac{1}{3}$: מתבדר

$\alpha=-1$: לא מוגדר

$\alpha<-1$: מתבדר

שאלה 3

לכל מספר ממשי $0 < x$, נגדיר $f(x) := x^x$.

מצא את הנקודות $0 < x$ בהן הפונקציה f גזירה, וחשב את הנגזרת $f'(x)$ בנקודות אלה.

נשים לב ש$f(x) = e^{log(f(x))}$, כעת נכתוב את $f(x)$ בצורה הבאה וניעזר בחוקי log

$$f(x) = x^x = e^{log(x^x)} = e^{xlog(x)}$$

כעת נגזור לפי כלל השרשרת

$$f'(x) = (xlog(x))' \cdot e^{xlog(x)} = (log(x) + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^x = x^x(log(x) + 1)$$

מצאנו את ערך הנגזרת, ונשים לב שמוגדר רק כאשר $x > 0$

שאלה 4

הוכח שלכל זוג מספרים ממשיים $1 \leq a < b \leq 2$ מתקיים

$$.\frac{\log b - \log a}{b^2 - a^2} < \frac{1}{2}$$

ניעזר במשפט ערך הממוצע המוכלל,

לכל $1 \leq a < b \leq 2$ נסתכל על הקטע $[a, b]$

נבחר פונקציות $f(x) := log(x), g(x) := x^2$ וברור כי גזירות בתחום (a, b)

לכן קיים $a < c < b$ כך ש

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{(\frac{1}{x})}{2x} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{log(b) - log(a)}{b^2 - a^2}$$

אבל בתחום $1 \leq x \leq 2$, מתקיים כי $\frac{1}{2x^2} < \frac{1}{2}$ ולכן מקבלים את הדרוש

$$\frac{log(b) - log(a)}{b^2 - a^2} < \frac{1}{2}$$