תרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשפ״ב

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה, ויהיו $A, B \leq G$. הוכיחו או הפריכו: אם A ו-B תת חבורות נורמליות ב-G, אז $A \cap B \triangleleft G$.

שאלה 2. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\operatorname{im} f$ תת־חבורה אבלית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $\varphi : D_8 \to U_{17}$.

שאלה 3. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. (רמז: העזרו בשאלה קודמת)

ב. קיים מונומורפיזם $f : S_4 \to S_5$.

ג. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$

שאלה 4. בכל סעיף קבעו ונמקו האם החבורות איזומורפיות. רמז כללי: סדרים של איברים.

א. החבורה $\mathbb{Z}_{40}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4$.

ב. החבורה $\mathbb{Z}_{33}$ והחבורה $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3$.

ג. החבורה S_4 והחבורה $\mathbb{Z}_2 \times A_4$.

ד. החבורה S_5 והחבורה D_{60}.

ה. החבורה $\mathbb{C}^*$ והחבורה

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

עם הפעולה של כפל מטריצות (שכבר הראיתם שהיא חבורה).

שאלה 5. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H) \le G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \le G$ לכל $g \in G$.

ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K) = K$.

שאלה 6. נגיד שחבורה היא פשוטה אם אין לה תת חבורות נורמליות פרט לעצמה ול-$\{e\}$.
תהי G חבורה פשוטה. הוכיחו כי אם $f\colon G \to H$ הוא הומומורפיזם אז הוא או שיכון או ההעתקה הטריוויאלית (ששולחת כל איבר לאיבר היחידה).

שאלה 7. בסעיפים הבאים, קבעו האם $H \lhd G$ (אין צורך לבדוק אם H היא תת חבורה).

א. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

ב. $G = GL_n(\mathbb{F})$, $H = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{F}^\times\}$.

ג. $G = GL_n(\mathbb{F})$. עבור $P \in GL_n(\mathbb{F})$ נתונה, $H = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid A^t P = PA^{-1}\}$.

ד. $G = S_n$, $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.
הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על הקבוצה של כל המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון. הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש רק מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

בהצלחה!