תרגיל 10 - פתרון

שאלה 1

(1) עבור $0<x<1$ קבל $\frac{1}{x}>1$, ולכן:
$$\frac{1}{x^{1/x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} > \frac{1}{x}$$

(כי אם $t_2>t_1$ ו- $a>1$ אז $a^{t_2}>a^{t_1}$),

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/x}}$ מתבדר.

(2)
$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\, dx = \int_0^1 e^{-x}\ln x\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\ln x\, dx$$

טענה: $\ln x \le 2e^{x/2}$ עבור $1\le x$.

הוכחה: נגדיר $g(x)=2e^{x/2}-\ln x$,
$$g'(x)=\frac{1}{2}2e^{x/2}-\frac{1}{x} = e^{x/2}-1/x \geq e^{1/2}-1>0$$

לכן, g עולה ממש ב-$[1,\infty)$ ומכאן שמתקיים:
$$g(x)=2e^{x/2}-\ln x > g(1)=2e^{1/2}>0$$, כנדרש.

מהטענה ניתן להסיק כי: $0< e^{-x}\ln x \le 2e^{-x/2}$ ($1\le x$).

האינטגרל: $\int_1^\infty 2e^{-x/2}\,dx = -4e^{x/2}\Big|_1^\infty = 4\sqrt{e}$ - מתכנס,

ולכן גם $\int_1^\infty e^{-x}\ln x\,dx$ מתכנס בהחלט - לפי מבחן ההשוואה.

עבור $0<x<1$. $|e^{-x}\ln x| \le |\ln x| = -\ln x$

$$\int_0^1 -\ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 -\ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}(-\ln x\cdot x + x)\Big|_t^1 =$$
$$= \lim_{t\to 0^+}(t\ln t + 1 - t) = 1$$

ולכן, לפי מבחן ההשוואה $\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx$ מתכנס בהחלט.

מסקנה סופית! האינטגרל מתכנס בהחלט.

(3) האינטגרל $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה (ודאו!).

אולם הוא אינו מתכנס בהחלט, נראה זאת:

$$(*) \qquad \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}}\right)$$

כעת, האינטגרל $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה (ודאו!),

ולכן נניח שהאינטגרל $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}}dx$ מתכנס אזי אוטומטית האינטגרל

ינבע שהאינטגרל $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_2^\infty 2\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}}\right)dx$ מתכנס.

אולם: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ ולכן, לפי מבחן ההשוואה

הגבולי, מכיון שהאינטגרל $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתבדר (שהרי $1 \geq \frac{1}{2}$) גם

$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ מתבדר,

מכיון שהאינטגרל $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}}dx$ מתבדר, לכן, לפי (*),

ולפי מבחן ההשואה, האינטגרל $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}dx$ לא מתכנס בהחלט.

מסקנה סופית: האינטגרל הנתון מתכנס בתנאי.

שאלה 2

יהי $\varepsilon > 0$. נחשב:

$$\int_\varepsilon^1 g(x)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)dx = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{t^2}dt = dx \end{bmatrix} = \int_{1/\varepsilon}^1 -\frac{g(1/t)}{t^2}\sin t\, dt$$

ולכן:

$$\int_0^1 g(x)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 g(x)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)dx \overset{a:=\frac{1}{\varepsilon}}{=} \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{g(\frac{1}{t})}{t^2}\sin t\, dt =$$

$$= \int_1^\infty \frac{g(\frac{1}{t})}{t^2}\sin t\, dt.$$

נבדוק שתנאי מבחן דיריכלה מתקיימים לגבי האינטגרל האחרון:

(א) נראה שהפונ': $\frac{g(\frac{1}{t})}{t^2}$ יורדת ל-0 :

אם $0<t_1<t_2$, אז: $x_1=\frac{1}{t_1} > x_2=\frac{1}{t_2}$, ונתון ש $x^2g(x)$ עולה, לכן:

$$\frac{g(\frac{1}{t_1})}{t_1^2} = x_1^2\, g(x_1) \geq x_2^2\, g(x_2) = \frac{g(\frac{1}{t_2})}{t_2^2}$$

נובע ש- $\frac{1}{t^2}g(\frac{1}{t})$ יורדת.

וכן: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{g(\frac{1}{t})}{t^2} = \lim\limits_{x=\frac{1}{t}\to 0^+} x^2 g(x) \underset{\text{נתון.}}{=} 0$, כנדרש.

(ב) $\frac{g(\frac{1}{t})}{t^2}$ רציפה ב $[1,\infty)$ כיוון שזה שקול לכך ש-$g(x)$ רציפה ב- $(0,1]$.

(ג) $$\left|\int_1^x \sin t \, dt\right| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2 \qquad \forall x \geq 1$$

התנאים מתקיימים, לכן נוכל להפעיל את מבחן דיריכלה ונסיק כי האינטגרל מתכנס.