

## תרגיל בית מספר 6

### אינדוקציה

### תיכונת 1 תשע"ט

#### 4. אינדוקציה מתמטית.

1. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית שלכול  $n$  טבעי מתקיים :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2}{4} (n + 1)^2$$

2. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית (או בדרך אחרת) שלכול  $n$  טבעי מתקיים :

$$3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{3}{4^{n-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

3. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית שלכול  $n$  טבעי זוגי מתקיים :

$$\frac{4}{1 \cdot 3} - \frac{8}{3 \cdot 5} + \frac{12}{5 \cdot 7} - \frac{16}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{(-1)^{\binom{n}{2}-1} \cdot 2n}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{\binom{n}{2}+1}}{n+1}$$

.4

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל  $n$  טבעי מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)} < \frac{1 \ln}{5(2n+1)}$$

.5

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל  $n$  טבעי מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

.6

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל  $n$  טבעי, הביטוי  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  מתחלק ב-6 ללא שארית.

.7

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל  $n$  טבעי אי-זוגי, הביטוי  $2^{3n+1} + 2 \cdot 6^n$  מתחלק ב-28 ללא שארית.

.8

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שלכל  $n$  טבעי, הביטוי  $2 \cdot 5^n + 2^{n+2} - 18$  מתחלק ב-24 ללא שארית.

### שאלה 2 מתוך קיץ 2005

הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$