שאלה 1

א. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

ב. $\mathbf{2\left(x^2+2x+\frac{5}{2}\right)=2\left((x+1)^2+\frac{3}{2}\right)}$

ג. $\mathbf{7\left(x^2+\frac{1}{7}x+\frac{100}{7}\right)=7}\left(\left(x+\frac{1}{14}\right)^2+\frac{100}{7}-\frac{1}{196}\right)$

שאלה 2

1. x^2+4x-1

2. $3x^2-15x+75-\frac{375}{x+5}$

3. $1+\frac{-3x^2+4x-1}{x^3-x}$

<u>שאלה 3</u>

1) $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$

פתרון:

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}=\frac{x^2-2x}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$

$x^2-2x=A(x-1)+B(x-3)$

נציב $x=1$

$-1=-2b$ ולכן $B=\frac{1}{2}$

נציב $x=3$: $3=2A$ ולכן $A=\frac{3}{2}$

ולכן הפירוק הוא $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

2) $\frac{x^3}{x^2+6x+10}$

פתרון:

נשים לב שהמעלה של המונה היא קטנה יותר מהמכנה לכן נחלק את המונה במכנה ונקבל

$\frac{(x^2+6x+10)(x-6)+20x+60}{x^2+6x+10}=x-6+\frac{20x+60}{x^2+6x+10}$

בנוסף נשים לב שהמכנה אי פריק ולכן זה הפירוק

$\frac{x^2+1}{x^2+6x+9}$ (3

פתרון:

כמו בדוגמה הקודמת נשים לב שמעלת המונה שווה למעלת המכנה ולכן לאחר חילוק פולינומים נקבל:

$$\frac{x^2+6x+9-6x-8}{x^2+6x+9} = 1 - \frac{6x+8}{(x+3)^2}$$

נזכר של עבור כל חזקה של $(x+3)$ יש שבר חלקי כלומר:

$$\frac{6x+8}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$6x+8 = A(x+3)+B$$

לאחר פתרון נקבל: $A=6$, $B=-10$

ולכן הפירוק הוא $1 - \frac{6}{x+3} + \frac{10}{(x+3)^2}$

4) פירוק המכנה לגורמים $(x-2)(x-3)$ לכן מקבלים

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

$\frac{11x+17}{2x^2+7x-4}$ (5

פתרון:

$$2x^2+7x-4 = (x-\tfrac{1}{2})(x+4)$$

$$\frac{11x+17}{(x-\frac{1}{2})(x+4)} = \frac{2(11x+17)}{(2x-1)(x+4)} = 2\cdot\left(\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+4}\right)$$

$$11x+17 = 2A(x+4)+2B(2x-1)$$

$$A=\frac{5}{2}, B=\frac{3}{2}$$

ולכן $\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{x+4}$

<u>שאלה 4</u>

1. אחרי חילוק פולינומים נשארים עם:

$$\int dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx$$

הראשון כמובן x, לחישוב השני נפרק את המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי משוואה דו-ריבועית) ונבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx = \int \frac{5\mathrm{x}^2+4}{(\mathrm{x}^2+1)(\mathrm{x}^2+4)}dx = \frac{16}{3}\int \frac{1}{x^2+4}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

סה"כ מקבלים

$$x - \frac{8}{3}arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}arctan(x) + C$$

2. פירוק המכנה לגורמים $(x^2+1)(x^2+4)$ (לפי משוואה דו-ריבועית)
אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{3}\int \frac{5x+3}{x^2+1}dx - \frac{5}{3}\int \frac{x}{x^2+4}dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{5}{6}\big(ln(x^2+1) - ln(x^2+4)\big) + arctan(x) + C$$

3. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים: $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

סה"כ האינטגרל:

$$\frac{1}{4}ln|x-1| - \frac{1}{4}ln|x+1| - \frac{1}{2}arctan(x) + C$$

4. אחרי חילוק פולינומים: $2 + \frac{3x^2-x+2}{x^3-8}$

נטפל באינטגרל של השבר: פירוק שלו לגורמים (לפי הנוסחא של $a^3 - b^3$):

$$(x-2)(x^2+2x+4)$$

אחרי פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2}$$

סה"כ האינטגרל:

$$2x + ln|x^2+2x+4| - \frac{1}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + ln|x-2| + C$$

5. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי ההדרכה שפורסמה):

$$\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$$

לאחר פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{\sqrt{8}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)$$

.6

.7 $3ln|x-3|-2ln|x-2|+C$

.8 $3ln|x+4|+\frac{5}{2}ln|2x-1|+C$

.9 $ln|x|+2ln|x+3|-ln|x-3|+C$

10. אחרי חילוק פולינומים:

$$3+\frac{12x-22}{x^2-4x+4}$$

נטפל בשבר: המכנה מתפרק ל-$(x-2)^2$. פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{12}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

סה"כ מקבלים

$$3x+12ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$$

11. אחרי חילוק פולינומים $x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}$

נטפל בשבר הימני. פירוק המכנה $(x-1)(x-2)$. אחרי שברים חלקיים

$$\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2}+3x+8ln|x-2|-ln|x-1|+C$$

12. תשובה סופית $\frac{x^3}{3}+x-ln|x|+ln|x+1|+2ln|x-1|+C$

13. אחרי חילוק פולינומים

$$2+\frac{2x+3}{x(x-1)}$$

תשובה סופית

$$2x-3ln|x|+5ln|x-1|+C$$

14. המכנה כבר מפורק. אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{x-3}dx-\int\frac{1}{(x-3)^2}dx$$

סה"כ

$$-ln|x+1|+2ln|x-3|+\frac{1}{x-3}+C$$

15. המכנה כבר מפורק, אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\frac{14}{17}\int\frac{1}{4x-1}dx+\frac{3}{17}\int\frac{4x+1}{x^2+1}dx$$

סה"כ

$$-\frac{7}{34}ln|4x-1|+\frac{6}{17}ln|x^2+1|+\frac{3}{17}arctan(x)+C$$

16. נבצע חילוק פולינומים. המכנה כבר אי-פריק. סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2}-3x+ln|x^2+1|+C$$

<u>שאלה 5 (תרגיל רשות – לא להגשה)</u>

ראינו שכל אינטגרל של פונקציה רציונלית ניתן ע"י חילוק פולינומים ופירוק לשברים חלקיים להביא לאחד מ-4 סוגי אינטגרלים (n מספר טבעי):

$$\int\frac{A}{ax+b},\int\frac{A}{(ax+b)^n},\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

ראינו איך מטפלים ב-3 הראשונים. מטרת שאלה זו להדריך אתכם להגיע לנוסחה לפתרון האינטגרל הרביעי.

א. הראו כי עבור $a>0$, מתקיים $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctan\frac{x}{a}+C$

ב. כעת חשבו את האינטגרל מסעיף א' בדרך נוספת, ע"י אינטגרציה בחלקים, כאשר $u=\frac{1}{x^2+a^2}$ ו-$v'=1$.

ג. בסעיף ב' לאחר אינטגרציה בחלקים מקבלים בצד ימין את האינטגרל $\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$. ע"י הוספת והחסרת a^2 מהמכנה, הציגו אותו ע"י אינטגרל ידוע + $\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$ (כפול קבוע).

ד. כמסקנה מסעיפים א'-ג' מקבלים כי כעת יש לנו נוסחא לחישוב $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$.

ה. הכלילו את התהליך לעיל: כדי למצוא איך לחשב את $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ מתחילים עם $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx$ ועושים עליו אינטגרציה בחלקים עם $v' = 1$. כך מקבלים ביטוי עבור $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$ באמצעות $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx$. כלומר אם אנחנו יודעים לפתור את האינטגרל הזה עבור n מסוים אנחנו יודעים לפתור אותו גם עבור $n+1$, וכיוון שאנחנו יודעים לפתור את הראשון (סעיף א'), אנחנו יודעים כעת לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$.

ו. כעת נעבור לפתרון $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$. *ראשית ניתן להניח כי $a = 1$ (אחרת הוציאו אותו גורם משותף ואז מחוץ לאינטגרל).*

ז. כעת בצעו השלמה לריבוע במכנה ואחריה הציבו $t = x + \frac{b}{2}$.

ח. את האינטגרל שהתקבל ניתן להפריד לשני אינטגרלים, אחד מהם נפתר ע"י הצבה והשני הוא האינטגרל שפתרנו בסעיפים א'-ה'.