

מבחן באנליזה מודרנית 1

מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל סעיף שווה 8 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. יהי (X, S, μ) מרחב מידה חיובית.
- הגדירו פונקציה מדידה S .
 - הגדירו פונקציה אינטגרבילית $d\mu$.
 - צטטו את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג, ב- (X, S, μ) .
 - תהי $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות - S . נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כ"מ (du) .

2. א. צטטו את המשפט המאפיין קבוצות מדידות ביחס ל"מידת המכפילה" $u \times v$.
- צטטו את משפט פוביני.
 - תהי m מידת לבג ו- u מידת הספירה על הקטע $K = [0, 1]$. ניצור את מידת המכפילה $w = m \times u$ על $K \times K$. הוכיחו שהאלכסון $A = \{(x, y) \in K \times K : x = y\}$ קבוצה מדידה dw . (הדרכה: הוכיחו ש- A מטיפוס $R_{\sigma\delta}$).
 - בנתונים של סעיף ג', הראו ששלושת האינטגרלים $\int_{K \times K} I_A dw$, $\int_K \left[\int_K I_A(x, y) du(y) \right] dm(x)$ ו- $\int_K \left[\int_K I_A(x, y) dm(x) \right] du(y)$ כולם שונים זה מזה.
 - הסבירו מדוע התוצאה של סעיף ד' אינה סותרת את משפטי פוביני וטונלי.

3. א. הגדירו מרחבי $L^p[d\mu]$ $1 \leq p \leq \infty$ ביחס למידה כלשהי.
- הגדירו מרחב בנך.
 - הוכיחו ש- $L^\infty(du)$ מרחב שלם.
 - הגדירו את l^p $1 \leq p \leq \infty$, והוכיחו ש- $l^1 \subset l^\infty$.
 - הוכיחו שאם נשרה את נורמת l^∞ על l^1 אז הוא לא מרחב שלם.