נכתב על ידי יהונתן רגב

טורי חזקות

תזכורת

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אזי, הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[-r, r]$ לכל $0 < r < R$.

בנוסף, אם הטור מתכנס בהחלט כאשר $x = R$, אזי הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[-R, R]$.

טענה

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

נניח שהטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$$

מתבדר.

אזי, הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

אינו מתכנס במידה שווה בקטע $(-R, R)$.

הוכחה

נניח בשלילה כי טור החזקות מתכנס במידה שווה בקטע $(-R, R)$.

יהי $0 < \varepsilon$.

לפי קריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $x \in (-R, R)$.

הפונקציה:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot x^k$$

הינה סכום סופי של מונומים, כלומר פולינום.

לכן, עפ"י משפא היא רציפה בכל $\mathbb{R}$. בפרט:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k = \lim_{x \to R} \sum_{k=n}^{m} a_k \cdot x^k$$

אבל:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $x \in (-R, R)$.

לכן:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k\right| = \left|\lim_{x \to R^-} \sum_{k=n}^{m} a_k \cdot x^k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

לכן, הטור:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k$$

מקיים את קריטריון קושי (להתכנסות טורי מספרים), לכן הוא מתכנס בסתירה להנחה שהוא מתבדר.

לכן, הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

אינו מתכנס במידה שווה בקטע $(-R,R)$.

$\blacksquare$

משפט

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

נניח שהטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$$

מתכנס.

אזי, הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

מתכנס במידה שווה בקטע $[r,R]$ לכל $-R<r<R$.

הערה

אם טור המספרים מתכנס בהחלט, עפ"י טענה (תזכורת) הטענה נכונה. לכן, הטענה מחדשת רק במקרה שטור המספרים מתכנס בתנאי.

הוכחה

יהי $0<\varepsilon$.

הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$$

מתכנס, לכן עפ״י קריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \cdot R^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right|$$

נשים לב כי:

$$\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k} - \left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m = \sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k} \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^{n+k} - \left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k} - \left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m = \sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k} \cdot \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+k} - \left(\frac{x}{R}\right)^m\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k} - \left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m = \sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k} \cdot \left[\sum_{j=k}^{m-n-1} [\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}]\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k} - \left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m = \sum_{j=0}^{m-n-1} \sum_{k=0}^{j} a_{n+k} \cdot R^{n+k} \cdot \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]$$

$$\Downarrow$$

יהי $x \in [0, R]$.

בפרט:

$$\left|\frac{x}{R}\right| \leq 1$$

לכן:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k}\right| = \left|\left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right) \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^m + \sum_{j=0}^{m-n-1} \sum_{k=0}^{j} a_{n+k} \cdot R^{n+k} \cdot \left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j} - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| \le \left|\left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\right)\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^{m}\right| + \left|\sum_{j=0}^{m-n-1}\sum_{k=0}^{j} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| \le \overbrace{\left|\left(\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\right)\right|}^{\le\frac{\varepsilon}{3}}\cdot\overbrace{\left|\frac{x}{R}\right|^{m}}^{\le 1} + \left|\sum_{j=0}^{m-n-1}\sum_{k=0}^{j} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{j=0}^{m-n-1}\sum_{k=0}^{j} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=0}^{m-n-1}\left|\sum_{k=0}^{j} a_{n+k}\cdot R^{n+k}\cdot\overbrace{\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]}^{\ge 0}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=0}^{m-n-1}\sum_{k=0}^{j}\left|a_{n+k}\cdot R^{n+k}\right|\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=0}^{m-n-1}\sum_{j=k}^{m-n-1}\left|a_{n+k}\cdot R^{n+k}\right|\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+j+1}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k}\cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=0}^{m-n-1}\left|a_{n+k}\cdot R^{n+k}\right|\cdot\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+k}-\left(\frac{x}{R}\right)^{m}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \left|\sum_{k=0}^{m-n-1} a_{n+k} \cdot R^{n+k}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-n} a_{n+k} \cdot x^{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $x \in [0, R]$ ולכל $N \leq n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot x^k\right| < \varepsilon$$

עפ"י הקריטריון של קושי (להתכנסות במידה שווה של טורי פונקציות), טור החזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

מתכנס במידה שווה בקטע $[0, R]$.

אם $0 < r < R$, אזי: $[r, R] \subseteq [0, R]$, לכן הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[r, R]$.

אם $-R < r < 0$, אזי עפ"י משפט נטור מתכנס במידה שווה בקטע $[r, -r]$, לכן מתכנס במידה שווה באיחוד $[0, R] \cup [r, -r] = [r, R]$.

$$\blacksquare$$

מסקנה

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אזי, הטור מתכנס במידה שווה בכל תת קטע סגור של תחום ההתכנסות.

הוכחה

עפ"י שלוש הטענות האחרונות (טענות 12.4,12.5,12.6).

12.4 $\Leftarrow$ התכנסות במידה שווה בתת קטע סגור של $(-R,R)$.

12.5 $\Leftarrow$ את המקרים בהם $\pm R$ שייכים לתחום ההתכנסות.

$\blacksquare$

משפט

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי $f(x)$ הסכום.

אזי, $f(x)$ רציפה בכל נקודה x_0 בתחום ההתכנסות של הטור.

הוכחה

יהי x_0 בתחום ההתכנסות של הטור.

יהי I תת קטע סגור של תחום ההתכנסות כך ש: $x_0 \in I$, והטור מתכנס במידה שווה בקטע I.

קיים I כנ"ל, שכן:

$$x_0 \in (-R,R) \Longrightarrow I \coloneqq [-|x_0|, |x_0|]$$

$$x_0 = R \;\Longrightarrow I = [0,R]$$

המונומים $a_n \cdot x^n$ רציפים בכל $\mathbb{R}$, ובפרט בקטע I, אזי עפ"י משפט הסכום $f(x)$ גם רציף בקטע I.

$\blacksquare$

משפט

יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו, ויהי $f(x)$ הסכום.

נתבונן בטור (החזקות):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

יהי $s(x)$ הסכום של טור הנגזרות.

אזי:

1. רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא גם R.
2. לכל $x_0 \in (-R, R)$, $f(x)$ גזירה ב - x_0 ומקיימת $f'(x) = s(x)$.
3. אם טור הנגזרות מתכנס ב - R, אזי הטור המקורי גם מתכנס ב – R והסכום $f(x)$ גזיר משמאל ומקיים: $f_-'(R) = s(R)$.

הוכחה

1. יהי R' רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות.
נוכיח: $R' = R$.
יהי $|x_0| < R'$.
אזי, הטור:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$
מתכנס בהחלט.
כלומר, הטור:
$$\sum_{n=0}^{\infty}|n| \cdot |a_n| \cdot |x^{n-1}|$$
מתכנס.
הטור:
$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n \cdot x^{n-1}|$$
מתכנס עפ"י מבחן ההשוואה הראשון.
לכן:
$$|x_0| \cdot \sum_{n=0}^{\infty}|a_n \cdot x_0^{n-1}| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n \cdot x_0^{n}|$$
מתכנס.
לכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n$$

מתכנס.

לכן: $|x_0| \le R$, לכן: $R' \le R$.

יהי $|x_0| < R$.

אזי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x_0^n|$$

מתכנס.

יהי $x_0 < r < R$.

אזי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot\ r^n$$

מתכנס.

לכן, קיים L כך ש: $|a_n \cdot x_0^n| < L$ לכל $0 \le n$.

מתקיים:

$$n \cdot |a_n \cdot x_0^{n-1}| = n \cdot \left|a_n \cdot r^n \cdot \left(\frac{x_0}{r}\right)^n \cdot \frac{1}{x_0}\right| \le n \cdot \frac{L}{|x_0|} \cdot \left|\frac{x_0}{r}\right|^n$$

הטור:

$$\frac{L}{|x_0|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left|\frac{x_0}{r}\right|^n$$

מתכנס לפי מבחן דלאמבר, שכן:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot \left|\frac{x_0}{r}\right|^{n+1}}{n \cdot \left|\frac{x_0}{r}\right|^n} = \left|\frac{x_0}{r}\right| < 1$$

לכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |a_n \cdot x_0^{n-1}|$$

מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

לכן: $|x_0 \le R'$.

בסה"כ:

$$R = R'$$

$\square$

2,3. הוכחה בהרצאה הבאה.

■