תרגול 1
3 יולי, 2016

אנליזה של שגיאות

<u>הגדרה:</u> יהי x ערך אמיתי ו - $\tilde{x}$ קירוב.

- השגיאה המוחלטת –

$$\Delta x = |x - \tilde{x}|$$

- השגיאה היחסית –

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את השגיאה המוחלטת והיחסית כאשר –

$$x = 69{,}000{,}000\ ,\tilde{x} = 68{,}967{,}549$$

<u>פתרון:</u>

$$\Delta x = |69{,}000{,}000 - 68{,}967{,}549| = 32{,}451$$

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{32{,}451}{69{,}000{,}000} = 0.004$$

■

ישנם 2 פרמטרים שנהוג להשתמש בהם:

1) <u>$fixed\ point$ (נקודה קבועה) –</u> כל מס' מיוצג ע"י כמה ספרות שצריך לפני הנקודה העשרונית ומס' קבוע של ספרות אחרי הנקודה. ספרות אחרי הנקודה נקראות <u>דצימליות</u>.

<u>לדוגמה:</u>

במספר 0.00123 יש 5 ספרות דצימליות.

<u>הערה:</u>

אם המספר מעוגל ל – d ספרות דצימליות, מתווספות אליו **שגיאה מוחלטת** שחסומה ע"י –

<u>בשיטת קיצוץ:</u> $|\Delta x| \le 10^{-d}$

<u>בשיטת עיגול:</u> $|\Delta x| \le 0.5 * 10^{-d}$

כאשר d מספר הספרות המשמעותיות, כאשר הבסיס עשרוני.

תרגול 1

3 יולי, 2016

דוגמה:

$$\pi = 3.14159265358$$

מצאו חסם **לשגיאה היחסית** כאשר המחשב משתמש בעיגול של מספר ל-4 ספרות דצימליות.

$$\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| =_{\text{חיוביים}} \frac{\Delta x}{x} \leq \frac{0.5 * 10^{-4}}{3.141592 \ldots} \approx 1.59 * 10^{-5}$$

2) $floating\ point$ (נקודה צפה) – כל מספר מיוצג ע"י מכפלה של מנטיסה בעלת אורך קבוע וחזקה מתאימה של הבסיס. ספרות המנטיסה נקראות ספרות משמעותיות.

למשל –

המספר 123456.

$$=> \underbrace{1.23456}_{\text{מנטיסה}} * \underbrace{10}_{\text{בסיס}}^{\overbrace{3}^{\text{חזקה}}}$$

במקרה כזה , במנטיסה יש 6 ספרות **משמעותיות** !

באופן כללי:

$$x = \underbrace{\sigma}_{sign} * \underbrace{M}_{\text{מנטיסה}} * \underbrace{B}_{\text{בסיס}}^{\overbrace{e}^{\text{חזקה}}}$$

עוד דוגמה:

המספר 0.00123 –

$$=> \underbrace{1.23}_{\text{מנטיסה}} * \underbrace{10}_{\text{בסיס}}^{\overbrace{-3}^{\text{חזקה}}}$$

3 ספרות משמעותיות במנטיסה.

הערה:

אם המספר מעוגל ל-t ספרות משמעותיות, מתווספת שגיאה יחסית שחסומה ע"י 10^{1-t} אם עובדים ב"קיצוץ" או $0.5 * 10^{1-t}$ עם עובדים ב"עיגול".

<u>תרגול 1</u>

3 יולי, 2016

<u>דוגמה:</u>

תאוצת גרביטציה g ידועה עם **2** ספרות משמעותיות - $g = 9.8$. מה השגיאה המוחלטת כאשר השתמשנו בשיטת עיגול?

ידוע כי מאחר ואנו בשיטת עיגול אז מתקיים -

$$\delta_x \le 0.5 * 10^{1-2} = 0.05$$

נציב בנוסחה הידועה של שגיאה מוחלטת עם שגיאה יחסית –

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|} \le 0.05 => \frac{\Delta x}{9.8} \le 0.05 => \Delta x \le 0.49$$

<u>הערה:</u>

באופן תקני – המנטיסה בעלת p ספרות תראה כך –

$$d_0.d_1d_2 \dots d_{p-1}$$

$$d_0 \ne 0 , 0 \le d_i < B$$

כאשר $B = 2$ בסיס בינארי (ערכים של 0 או 1).

<u>במחשב יש 2 תקנים:</u>

1) תקן $float$ $(IEEE32)$ - 32 סיביות (ביטים) לייצוג המספר.

2) תקן $double$ $(IEEE64)$ – 64 סיביות (ביטים) להצגת המספר.

תרגול 1

3 יולי, 2016

תקן $float$ $(IEEE32)$

$$\underbrace{\boxed{\ }}_{sign}\ \underbrace{\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}}_{\substack{\text{8 ביטים} \\ exp \\ \text{(חזקה)}}}\ \underbrace{\boxed{-1}\boxed{-2}\boxed{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\boxed{-23}}_{\substack{\text{23 ביטים} \\ \text{מנטיסה}}}$$

<u>$sign$:</u> סימן יכול להיות – 0: המספר חיובי.

1: המספר שלילי.

<u>חזקה:</u> $2^8 = 256$ אפשרויות. 2 מקרים מיוחדים –

- הכול "1" בחזקה.
- הכול "0" בחזקה.

ואז נשאר $256 - 2 = 254$ אפשרויות.

החזקה – כל מספר ב- $\{1 - 254\}$. מהחזקה נעשה נירמול ונוריד 127 שעוברים מייצוג בינארי לייצוג עשרוני – וכעת החזקה זה כל מספר ב - $\{-126 - 127\}$.

<u>דוגמה (עבור חזקה):</u>

צריך להעביר חזקה בינארית לחזקה עשרונית –

0	0	1	1	0	0	1	0	-	המספר.
<u>7</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	-	המיקום של הביט.

כעת –

$$1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^1 = 50 =>_{\text{נירמול}} exp = 50 - 127 = -77$$

<u>דוגמה (עבור מנטיסה):</u>

0	1	1	0	1	0	....	0	-	המספר.
<u>-1</u>	<u>-2</u>	<u>-3</u>	<u>-4</u>	<u>-5</u>	<u>-6</u>		<u>-23</u>	-	המיקום של הביט.

$$M = 1 + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-5} = 1.40625$$

תרגול 1

3 יולי, 2016

הערה:

נוסחה למנטיסה באופן כללי –

עבור המנטיסה הבאה:

b_{22}	b_{21}	b_{20}	b_{19}	....	b_0
-1	-2	-3	-4		-23

כאשר $b_{22},\dots,b_0$ הם 0 או 1, הנוסחה הינה –

$$M = 1 + b_{22} * 2^{-1} + b_{21} * 2^{-2} + \cdots + b_0 * 2^{-23}$$

הערה:

כשכל ה - b_i $(b_0 - b_{22})$ הם 1 אז המנטיסה כמעט שווה ל-2.

הוכחה:

סכום סדרה הנדסית –

$$S = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-23} = \cdots$$

■

הערה:

צורה כללית (מייצוג בינארי לייצוג עשרוני):

$$num = (-1)^{sign} * (mantisa)^{\overbrace{exp}^{\text{אחרי שעשינו נירמול}}}$$

(במנטיסה, חזקות המנטיסה הן שליליות ומתחילות ב- 1- . באופן אוטומטי נוסיף 1 לערך המנטיסה).

דוגמה:

נתון המספר הבינארי בתקן $float$. מהו המספר בצורה עשרונית?

$$\underbrace{0}_{sign}\ \underbrace{01101000}_{exp}\ \underbrace{1110010010\ldots0}_{Mantisa}$$

סימן: 0 ולכן המספר חיובי.

חזקה:

$$1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^2 = 104 \;\; => exp = 104 - 127 = -23$$

מנטיסה:

$$M = 1 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-6} + 1 * 2^{-9} = 1.892$$

ובסה"כ נקבל ש –

$$x = 1 * 1.892 * 2^{-23} \approx 2.256 * 10^{-7}$$

תרגיל:

ייצגו את המספר 46.75 בתקן $float$ (להעביר לבינארי).

פתרון:

$$46.75 = \underbrace{46}_{\text{אלגוריתם סופי}} + \underbrace{0.75}_{\text{אלגוריתם אינסופי}}$$

נמצא תחילה את 46 (אלגוריתם סופי) -

46	:2
23	0
11	1
5	1
2	1
1	0
0	1

(אם נקבל שיש פחות מ – 8 שאריות שזהו בייט , אז נוסיף אפסים במיקומים **הגבוהים** של הבייט, כמו שנראה כאן)

ולכן נקבל ש –

$$(46)_{\text{בסיס 2}} = 00101110$$

כעת נמצא את 0.75 (אלגוריתם אינסופי) –

0	.75	$/* 2$
1	5	
1	.0	
0	.0	

(אם נקבל שיש פחות מ-23 מספרים אז נוסיף אותם במיקומים הנמוכים יותר, כמו שנראה כאן).

ולכן נקבל ש –

$$(0.75)_{\text{בסיס 2}} = 110 \dots 0$$

נאחד את מה שקיבלנו את עכשיו ונקבל –

$$46.75 = 46 + 0.75 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2}$$

$$= \underbrace{2}_{\text{בסיס}}^{\overset{\text{חזקה לפני נירמול הפוך}}{\widetilde{5}}} * \underbrace{[1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7}]}_{\text{מנטיסה}}$$

וכעת –

$$exp = 5 + 127 = 132 = 128 + 4 = 2^7 + 2^2$$

ולכן בסה"כ –

0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	....	0
$sign$	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	....	-23

■

<u>הערות:</u>

- החזקה הנמוכה ביותר היא 126- , בכתיב בינארי: 00000001
- החזקה הגבוהה ביותר היא 127 , בכתיב בינארי: 111111110
- כאשר החזקה כולה אפסים וגם במנטיסה, זה ייצוג של המספר 0. אם החזקה כולה 1 וגם המנטיסה כולה 1, זה מייצג את ∞. אם החזקה כולה 1 ומספיק שבמקום אחד במנטיסה יש 0 אז המספר הוא NAN $(Not\ A\ Number)$.

תרגול 1

3 יולי, 2016

תקן $double\ (IEEE64)$

	11	10	9	... ...	3	2	1	0	−1	−2	... ...	−52
$sign$	11 ביטים exp (חזקה)								52 ביטים מנטיסה			

ובמקרה זה –

$$num = (-1)^{sign} * (Mantisa) * 2^{\overbrace{exp}^{\text{אחרי נירמול של 1023}}}$$

1023 קבוע $Base$.

<u>דוגמה:</u>

העבירו את המספר העשרוני לבינארי בתקן $double$: -71.3125.

<u>$sign$:</u> 1 כי המספר שלילי.

<u>חזקה:</u>

$$-71.3125 = -71 + 0.3125$$

<u>אלגוריתם סופי ואלגוריתם אינסופי -</u>

71	:2
35	1
17	1
8	1
4	0
2	0
1	0
0	1

0	.3125
0	.625
1	.25
0	.5
1	.0
0	.0

/* 2

ולכן –

$$71 = 01000111$$

$$0.3125 = 01010 \dots 0$$

נאחד את שתי התוצאות שקיבלנו –

$$71.3125 = 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} =$$

$$= \underbrace{2}_{\text{בסיס}}{}^{\overbrace{6}^{\text{לפני הוספת 1023}}} * \underbrace{[1 + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-10}]}_{\text{מנטיסה}}$$

ולכן –

$$exp = 6 + 1023 = 1029 = 1024 + 4 + 1 = 2^{10} + 2^{2} + 2^{0}$$

ובסה"כ נקבל את התשובה הסופית –

1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	....	0
$sign$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11		-52