

# תרגיל 5

להגשה עד 18.12.16

## שאלה 1

יהיו  $X, Y$  מרחבים טופולוגיים.  
הוכיחו כי אם  $f: X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f$  פונקציה בורלית (כלומר, מדידה- $(\mathbb{B}(X), \mathbb{B}(Y))$ ).

## שאלה 2

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, באשר  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$ . מהן הפונקציות  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  המדידות- $\mathbb{A}$ ?

## שאלה 3

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ולכל  $i \in \{1, 2, 3\}$  תהי  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה- $\mathbb{A}$ .  
לכל  $x \in X$ , נתבונן במשוואה:

$$g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה  $t$ .  
הוכיחו כי קבוצת כל ה- $x$ ים עבורם לפונקציה  $g_x$  יש שני שורשים שונים הינה מדידה- $\mathbb{A}$ , כלומר:

$$\{x \in X \mid \exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \text{ and } g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\} \in \mathbb{A}$$

## שאלה 4

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד.

1. תהי  $E \subseteq X$ . הוכיחו כי פונקצית האינדיקטור של  $E$ :  $\mathbf{1}_E: E \rightarrow \mathbb{A}$  אסם הקבוצה  $E$  מדידה- $\mathbb{A}$ .

2. יהיו  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מדידות- $\mathbb{A}$ . הראו כי הפונקציה:

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \mathbf{1}_{[g \neq 0]}(x)$$

הינה מדידה- $\mathbb{A}$ .

## שאלה 5

יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

1. אם  $|f|$  מדידה אזי  $f$  מדידה.

2. אם  $f^3$  מדידה אזי  $f$  מדידה.

**בהנאה!!**