תרגול 9 – טופולוגיה

הגדרה: נאמר שמרחב טופולוגי  הוא  אם לכל  קיימות סביבות  של  בהתאמה כך ש-.

**תרגיל**

יהי  מרחב טופולוגי. בהסתמך על הגדרה הנ"ל הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1.  הוא ;
2. כל נקודון הוא סגור ב- (במילים אחרות: );
3. כל קבוצה סופית  היא סגורה ב- ;
4. .

פתרון

נוכיח א' ב' ג' ד' א' ונקבל שהתנאים שקולים.

א ב: נניח בשלילה שקיים נקודון שאינו סגור ב-, כלומר קיים כך ש .

מכיון שבהכרח מתקיים  נסיק שקיים .

מכיון ש  נקבל שלכל סביבה של  מתקיים . כלומר לכל סביבה של  מתקיים  בסתירה לכך שהמרחב הוא .

ב ג: תהי קבוצה סופית. מקרה ראשון: אזי סגורה ב-שכן  מ"ט והקבוצה הריקה סגורה בכל מ"ט. מקרה שני: קיימים  כך ש אזי . עפ"י סעיף ב' לכל ,  סגור ב-. לכן סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

ג ד: תהי  ונראה ש . אם  אזי שכן  טופולוגיה. אחרת,  ומכאן סופית. מסעיף ג' נקבל ש  סגורה ב-. מכאן פתוחה ב-. כלומר .

ד א: יהיו  אזי מתקיים  וכן  (מדוע?) . מסעיף ד' נקבל ש-. לכן אם נבחר  נקבל ש  הן סביבות של  בהתאמה (ב- ) ומתקיים . לכן, מרחב  כדרוש.

מש"ל

**קומפקטיות והאוסדורף**

הגדרה

מ"ט יקרא מרחב **האוסדורף** אם לכל  קיימות סביבות  של  בהתאמה כך ש-. מרחב זה נקרא גם מרחב .

תזכורות

1. נאמר שמ"ט  הוא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי.
2. **משפט**: עבור  תת מרחב הוא קומפקטי  אם  אזי קיים תת כיסוי סופי . (לכל כיסוי פתוח של  ב- יש תת כיסוי סופי).
3. **משפט**: יהי  מ"ט האוסדורף. אם  קומפקטי אזי סגורה ב-.
4. **משפט**: יהי  מרחב קומפקטי.  סגורה אזי קומפקטי.

**תרגיל**

מצאו דוגמהלמ"ט  וקבוצה לא סגורה  כך ש- ת"מ קומפקטי.

פתרון

לפי תזכורת 3 אנו מבינים שצריך לחפש דוגמאות במרחבים שאינם האוסדורף.

נתבונן במרחב  אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית. נראה שכל תת-מרחב של  הוא קומפקטי ועם זאת, ראינו כבר שלא כל התת-קבוצות של מרחב זה הן סגורות (הסגורות היחידות הן הסופיות או המרחב כולו).

תהי . נבחר כיסוי פתוח של  ב-:  כאשר  פתוחות ב-. נראה שיש תת כיסוי סופי. יהי  אזי קיים  כך ש-. .  פתוחה וכן  ולכן  סופית. מתקיים  ולכן  היא קבוצה סופית גם כן. יש שתי אפשרויות: מקרה ראשון:  אבל אז  וזהוהתת-כיסוי הסופי הדרוש. מקרה שני: . לכל  נבחר סביבה  ונקבל את הכיסוי . ולכן  קומפקטי.

ניקח  אינסופית, אזי היא קומפקטית ולא סגורה.

מש"ל

**טענה** (שתוכיחו בשיעורי הבית)

יהי  מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי  אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. אזי  קומפקטי ב-.

הערה:

התנאי ש- הוא האוסדורף הינו הכרחי אפילו עבור חיתוך סופי של מרחבים קומפקטיים.

**דוגמה** – חיתוך של קומפקטיים שאינו קומפקטי

נתבונן במרחב טופולוגי הבא:  עם הטופולוגיה: 

(בדקו שזו אכן טופולוגיה).

זהו מרחב שאינו האוסדורף, שכן לא ניתן להפריד את הנקודה  מהנקודה  (שכן כל סביבה של כל אחת מהנקודות האלה מכילה את ).

כעת נראה שחיתוך של שני תת-מרחבים קומפקטיים אינו קומפקטי: יהיו  שני תת-מרחבים קומפקטיים (הם אכן קומפקטיים, שכן כל כיסוי פתוח שלהם ב- מכיל את הקבוצה עצמה ו/או את ; וכל אחת מהן כבר בפני עצמה מהווה תת-כיסוי סופי). כעת נתבונן בחיתוך שלהם:  ו- אינו קומפקטי בטופולוגיה זו (מדוע?).

מש"ל

תזכורת למשפטים שראיתם בכיתה:

1. תהי  פונקציה רציפה, כאשר  קומפקטי ו- האוסדורף. אזי  היא פונקציה סגורה.
2. תהי  פונקציה רציפה והפיכה, כאשר  קומפקטי ו- האוסדורף. אזי  הומאומורפיזם.

**תרגיל**

יהי  מרחב טופולוגי קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו:

1. אם  ו- קומפקטי אזי .
2. אם  ן-  האוסדורף אזי 

פתרון

1. תהי  פונקציית הזהות.  רציפה (מדוע?) והפיכה (תמיד נכון). ולכן, לפי משפט 2 הנ"ל היא הומאומורפיזם ולכן .
2. כנ"ל עם פונקציית הזהות .

מש"ל

**דוגמה**

נראה כי הוא תת-מרחב לא קומפקטי של הישר של סורגנפריי , בניגוד לכך שהוא קומפקטי כתת מרחב של  (בגלל היינה בורל).

נסמן את טופולוגיית התת-מרחב של סורגנפריי ב- , ואת טופולוגיית התת-מרחב של  ב- . נשים לב ש- קומפקטי והאוסדורף. מתקיים ש-(מדוע?) ונניח בשלילה ש- קומפקטי. לכן מסעיף א' בתרגיל לעיל נקבל ש-. נראה שזה לא נכון. מתקיים  ונראה ש-. ואכן, .  ולכן מהגדרת טופולוגיית התת-מרחב נקבל ש-.

מש"ל

**תרגיל**

יהי  מרחב מטרי, ונניח שיש  שהיא נקודת הצטברות של .

יהי תת-מרחב הבא של : . הראו שקיים שיכון .

(כזכור שיכון הוא העתקה שהיא הומאומורפיזם על תמונתה).

פתרון

היא נקודת הצטברות של ולכן קיימת סדרה  ב- כך ש-

וכך שכל איבריה שונים זה מזה וגם לכל .

אזי הפונקציה היא חח"ע.

רעיון ההוכחה ש-היא שיכון:

כזכור, כל פונקציה רציפה ממרחב קומפקטי לתוך מרחב האוסדורף היא פונקציה סגורה. במצב כזה אם הפונקציה היא בנוסף חח"ע אז היא שיכון טופולוגי.

במקרה שלנוהוא מרחב קומפקטי (הוכחתם בשיעורי בית);  הוא מרחב מטרי ולכן האוסדורף; הפונקציההיא חח"ע, לכן לפי המשפט הנ"ל נותר להראות רציפות של.

נוכיח רציפות בכל נקודה .

צ"ל שלכל סביבה  של  במרחב קיימת סביבה של  ב-כך ש-. תהי  סביבה של .

מקרה1: .

מתקיים ש- היא סביבה שלה. ברור שאז.

מקרה2: .

בגלל ש- קיים  כך ש-.

נגדיר סביבה  של  במרחב .

אז נקבל . הוכחנו רציפות של .

מש"ל