בדידה הרצאה 7

תזכורת:

תת-קבוצה $R \subseteq A \times B$ נקראת יחס מ-A ל-B.

פונקציות:

תהיינה A, B קבוצות, ויהי f יחס מ-A ל-B.

f נקרא **פונקציה** מ-A ל-B, אם הוא מקיים את התכונה הבאה: לכל $A \ni a$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש: $(a,b) \in f$.

כלומר, לכל איבר בקבוצה השמאלית מתאים איבר אחד בדיוק בימנית – שנמצא איתו בזוג ביחס.

סימון: כאשר קיים אובייקט יחיד שמקיים תכונה מסוימת, אפשר לסמן זאת: $\exists!$. למשל, במקרה שלנו, f הוא פונקציה מ-A ל-B, אם:

$$\forall a \in A \exists! b \in B : (a,b) \in f$$

למשל, $A = \{1,2,3\}, B = \{5,6,7,8\}$. נתבונן ביחסים הבאים מ-$A$

ל-B:

$$f_1=\{(2,5),(3,5),(1,8)\}$$

$$f_2=\{(1,8),(2,5)\}$$

$$f_3=\{(3,6),(2,5),(3,7),(1,8)\}$$

f_1 פונקציה.

f_2 לא פונקציה - עבור $3\in A$ לא קיים $b\in B$ כך ש: $(3,b)\in f_2$.

f_3 לא פונקציה - $(3,6),(3,7)\in f_3$ אך $7\neq 6$.

<u>סימונים ומינוחים:</u>

תהיינה A,B קבוצות ותהי $f\subseteq A\times B$ פונקציה מ-A ל-B.

1. אם $f\subseteq A\times B$ פונקציה, נסמן: $f:A\to B$.
2. אם $(a,b)\in f$, נסמן: $f(a)=b$. במצב כזה, נאמר ש-b הוא **התמונה** של a; a הוא **מקור** של b. למשל, בדוגמה הקודמת: $f_1=\{(2,5),(3,5),(1,8)\}$, אפשר לסמן במקום: $f_1(2)=5, f_1(3)=5, f_1(1)=8$. 5 הוא התמונה של 3. $2,3$ מקורות של 5.
3. כאשר $f:A\to B$ פונקציה, A נקראת **התחום** של f ונסמן: $A=Dom(f)$. B נקראת **הטווח** של f, ונסמן: $B=Ran(f)$.

<u>הערה:</u> הפונקציות בבית הספר היו פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (וקראו להן

$y = f(x)$) או פונקציות עם תחום שהוא תת-קבוצה של $\mathbb{R}$, למשל $f(x) = \frac{1}{x}$ היא פונקציה $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$. כמובן, שאפשר לחשוב על הפונקציה הזו גם כאשר התחום הוא $[1, 3]$.

<u>שוויון פונקציות:</u>

תהיינה A, B, C, D קבוצות ותהיינה $f : A \to B, g : C \to D$ פונקציות.

נאמר ש-$f = g$, אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

א. $A = C$.

ב. $B = D$.

ג. לכל x בתחום: $f(x) = g(x)$.

למשל, נתבונן בשתי הפונקציות הבאות: $f, g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$, המוגדרות ע"י:

$$f(x) = x^2, g(x) = x^4$$

לפונקציות אותו תחום ואותו טווח. כמו כן: $f(0) = g(0), f(1) = g(1)$, כלומר לכל x בתחום מתקיים: $f(x) = g(x)$, ולכן הפונקציות שוות: $f = g$.

הפונקציות $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$, $g : \{0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$ הן פונקציות שונות, מכיוון שהטווחים שונים.

<u>הערה:</u> מכיוון שחשוב שגם הטווח וגם התחום יהיו זהים בשתי הפונקציות, אפשר מלכתחילה להגדיר פונקציה בתור שלשה: (f, A, B), כאשר $f \subseteq A \times B$ מקיימת את התכונה של פונקציה.

במצב כזה, נאמר ש: $(f, A, B) = (g, C, D)$ אם ורק אם $f = g, A =$

$.C, B = D$

פונקציה חד-חד-ערכית:

אפשר להגדיר זאת גם ליחס שאיננו פונקציה, נתמקד בפונקציות.

תהיינה A, B קבוצות ותהי $f : A \to B$ פונקציה. f נקראת חד-חד-ערכית - **חח"ע** - אם:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$$

למקורות שונים יש תמונות שונות.

שימושי - באופן שקול, f חח"ע אם: $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$, כלומר לתמונות שוות יש מקורות שווים.

למשל:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ איננה חח"ע, למשל $3 \neq -3$ אך: $f(3) = f(-3) = 9$.
2. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ כן חח"ע, נסביר - יהיו $a_1, a_2 \in [0, \infty)$ כך ש: $f(a_1) = f(a_2)$, צ"ל: $a_1 = a_2$.

אם כן:

$$f(a_1) = f(a_2) \to a_1^2 = a_2^2 \to \sqrt{a_1^2} = \sqrt{a_2^2} \to |a_1| = |a_2|$$

מכיוון ש: $a_1, a_2 \in [0, \infty)$, מ-$|a_1| = |a_2|$ נוכל להסיק ש: $a_1 = a_2$,

כנדרש.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ (כאשר $a\neq 0$) היא חח"ע – אם $x_1\neq x_2$ אז: $ax_1\neq ax_2$ ואז: $ax_1+b\neq ax_2+b$, כלומר: $f(x_1)\neq f(x_2)$.

4. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$, המוגדרת ע"י: $f(A,B)=\min((A\cap B)\cup\{2\})$.

למשל:

$$f(\{1,2,3\},\{2,4,8\})=\min((\{1,2,3\}\cap\{2,4,8\})\cup\{2\})=\min\{2\}=2$$

הפונקציה הזו איננה חח"ע, למשל: $f(\{1,2,3\},\{2,4,8\})=f(\{2,4,8\},\{1,2,3\})$ למרות ש: $(\{1,2,3\},\{2,4,8\})\neq(\{2,4,8\},\{1,2,3\})$.

5. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$, המוגדרת ע"י: $f(A,B)=\min(A\cup B)$.

f בכלל לא פונקציה – לזוג $(\emptyset,\emptyset)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ אין תמונה בטווח.

<u>פונקציה על:</u>

תהיינה A,B קבוצות ותהי $f:A\to B$ פונקציה. f נקראת על, אם:

$$\forall b\in B\exists a\in A:f(a)=b$$

כלומר, לכל איבר בטווח יש מקור בתחום.

<u>למשל:</u>

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, איננה על, למשל עבור $-8\in\mathbb{R}$ לא קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש: $f(x)=-8$.

2. $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $f(x)=x^2$ על, נסביר. יהי $b\in[0,\infty)$, צ"ל שקיים $a\in\mathbb{R}$ עבורו: $f(a)=b$.

$f(a)=b$ פירושו $a^2=b$. לכן, למשל, $a=\sqrt{b}$ יקיים את הדרוש – $\sqrt{b}$ הוא מקור של b.

3. $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$, המוגדרת ע"י: $f(A,B)=\min((A\cap B)\cup\{2\})$.

f איננה על, למשל ל-$3\in\mathbb{N}$ לא קיים $(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ עבורו: $f(A,B)=3$, מכיוון ש:

$$f(A,B)=\min((A\cap B)\cup\{2\})\leq 2$$

<u>הערה:</u>

במעבר מדוגמאות 1 ל-2, צמצמנו את הטווח והפונקציה "הפכה" להיות על. תמיד אפשר לצמצם את הטווח כך שהפונקציה תהיה על – מורידים מהטווח את כל האיברים שאין להם מקור.

במעבר מדוגמאות 1 ל-2 בפונקציות חח"ע צמצמנו את התחום והפונקציה "הפכה" להיות חח"ע. תמיד אפשר לצמצם את התחום כך שהפונקציה תהיה חח"ע, אך זה מורכב יותר – לכל איבר b בטווח יש קבוצה של מקורות, ובוחרים איבר אחד ממנה שיישאר בתחום, את כל השאר מורידים. יש הרבה אופנים לבצע בחירה כזו.

האמת היא, שהיכולת לבחור איבר מתוך כל קבוצה – בהינתן קבוצה של קבוצות, לנסח כלל שבוחר מכל קבוצה איבר – איננה מובנת מאליה. היא נקראת אקסיומת הבחירה.