פתרון מועד ב' אינפי 3 תשע"ו

15 במרץ 2016

1. תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה ולא ריקה.
הראו שקיימת $p \in K$ כך שלכל $q \in K$, מתקיים:

$$\|p\| \leq \|q\|$$

<u>פתרון:</u>
אנו בעצם רוצים להראות שהפונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

מקבלת מינימום בכל קבוצה סגורה.
אנו יודעים שהיא (וכל פונקציה רציפה אחרת) מקבלת מינימום בכל קבוצה קומפקטית; הפונקציה אכן רציפה כהרכבת רציפות.
לפי היינה־בורל, קבוצה $B \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.
הקבוצה שלנו היא סגורה, אך לא חסומה; נרצה להסתכל על קבוצה קומפקטית כדי לומר שאכן יש מינימום.
"תגיד, מוח, מה אתה רוצה לעשות הלילה?"
"מה שאנחנו עושים בכל לילה, פינקי, חותכים את הקבוצה עם קבוצה קומפקטית!"
נחתוך את הקבוצה K עם כדור שמרכזו בראשית, עם רדיוס מספיק גדול כך ש:

$$B[0,r] \cap K \neq \emptyset$$

המטריקה שלנו מושרית מהנורמה, ולכן:

$$B[0,r] = \{x | \|x\| \leq r\}$$

כי $\|x\| = d(0,x)$.

כעת, הקבוצה $B[0,r] \cap K \neq \emptyset$ היא קבוצה קומפקטית, ולכן הפונקציה f מקבלת בה מינימום.

כלומר, קיימת $p \in B[0,r] \cap K$ כך שלכל $q \in B[0,r] \cap K$, $\|p\| \leq \|q\|$.

מצד שני, לכל $q \in (B[0,r])^c \cap K$, מכיוון ש: $q \in (B[0,r])^c$ נקבל:

$$\|p\| \leq r < \|q\|$$

ולכן בכל מקרה, $\|p\| \leq \|q\|$ כנדרש.

2. נגדיר:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln\left(x^2+y^2\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. הראו ש$-f$ רציפה ב$-(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

אנו צריכים להראות שמתקיים:

$$\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow 0} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2 \longrightarrow 0} xy \ln\left(x^2+y^2\right) = \lim_{r^2 \longrightarrow 0} r^2 \cos\theta \sin\theta \ln\left(r^2\right) =$$

כעת:

$$0 \leq \left|r^2 \cos\theta \sin\theta \ln\left(r^2\right)\right| \leq 2\left|r^2 \ln r^2\right| \longrightarrow 0$$

כאשר $r^2 \longrightarrow 0$, לפי לופיטל.

לכן לפי כלל הסנדוויץ', גם $\lim_{x^2+y^2 \longrightarrow 0} f(x,y) = 0$ והפונקציה רציפה.

ב. קבעו האם f דיפרנציאבילית ב$-(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

לכן, כדי לבדוק דיפרנציאביליות עלינו להראות שמתקיים:

$$f\left(h_1,h_2\right)=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1h_2\ln\left(h_1^2+h_2^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

שוב, אם נעבור לקואורדינטות קוטביות נקבל:

$$\lim_{r^2\longrightarrow 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta\ln\left(r^2\right)}{\sqrt{r^2}}=\lim_{r\longrightarrow 0}2r\cos\theta\sin\theta\ln r$$

באופן דומה לסעיף הקודם:

$$0\leq\left|2r\cos\theta\sin\theta\ln r\right|\leq 2\left|r\ln r\right|\longrightarrow 0$$

כאשר $r\longrightarrow 0$, לפי לופיטל. לכן הגבול אכן 0 והפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

3. א. מצאו את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$$

וסווגו אותן.

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרידאנט ל־0:

$$\begin{cases} f_x=6x^2+y^2+10x=0\\ f_y=2xy+2y=0\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל: $2y\left(x+1\right)=0$.

אם $x=-1$, מהמשוואה הראשונה נקבל: $y^2-4=0$, והנקודות הן: $(-1,\pm 2)$.

אם $y=0$, מהמשוואה השנייה נקבל $6x^2+10x=0$, והנקודות הן: $\left(-\frac{5}{3},0\right),(0,0)$.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f=\begin{pmatrix}12x+10 & 2y\\ 2y & 2x+2\end{pmatrix}$$

נבדוק מה קורה בכל אחת מהנקודות:

$$H_f\left(-1,2\right)=\left(\begin{array}{cc}-2 & 4\\ 4 & 0\end{array}\right)$$

שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f\left(-1,-2\right)=\left(\begin{array}{cc}-2 & -4\\ -4 & 0\end{array}\right)$$

שוב, שני המינורים שליליים ולכן זו נקודת אוכף.

$$H_f\left(0,0\right)=\left(\begin{array}{cc}10 & 0\\ 0 & 2\end{array}\right)$$

שני הע"ע חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

$$H_f\left(-\frac{5}{3},0\right)=\left(\begin{array}{cc}-10 & 0\\ 0 & -\frac{4}{3}\end{array}\right)$$

שני הע"ע שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.

ב. משטח במרחב מוגדר על ידי: $z=x^2+y^2$. מצאו נקודה על המשטח שבה המישור המשיק למשטח מאונך לווקטור $(1,1,-2)$.

<u>פתרון:</u>

המשוואה היא:

$$f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z=0$$

בנקודה (x_0,y_0,z_0), הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=2x_0,f_y=2y_0,f_z=-1$$

אם כך, משוואת המישור המשיק היא:

$$2x_0\left(x-x_0\right)+2y_0\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0$$

אנו רוצים שהמישור יהיה מאונך לווקטור $(1,1,-2)$. לכן, על הנורמל למישור להיות תלוי ליניארית בווקטור $(1,1,-2)$.

הנורמל הוא: $(2x_0,2y_0,-1)$, ולכן נדרוש:

$$(1,1,-2)\,t=(2x_0,2y_0,-1)$$

נקבל: $t=\frac{1}{2}$, ולכן $x_0=y_0=\frac{1}{4}$.

ממשוואת המשטח, נקבל: $z_0=x_0^2+y_0^2=\frac{1}{8}$. לכן הנקודה היא $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$.

4. מצאו את הנפח של הגוף:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2\leq y,0\leq z\leq 2x\right\}$$

<u>פתרון:</u>

את המשוואה $x^2+y^2\leq y$ אפשר לכתוב כך:

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$$

כעת, נבצע שינוי משתנים קל:

$$(x,y,z)\mapsto\left(x,u+\frac{1}{2},z\right)$$

היעקוביאן הוא $|J|=1$, ונקבל את הגוף:

$$\left\{(x,u,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+u^2\leq\frac{1}{4},0\leq z\leq 2x\right\}$$

כעת, נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=r\cos\theta,u=r\sin\theta,z=z$$

נקבל:

$$0\leq\theta\leq 2\pi,0\leq r^2\leq\frac{1}{4},0\leq z\leq 2r\cos\theta$$

כלומר $0 \le r \le \frac{1}{2}$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$V = \iiint 1dzdxdu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2r\cos\theta} rdzdrd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r^2\cos\theta drd\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{24}\cos\theta d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta =$$

האינטגרל עצמו מתאפס, אבל אנו רוצים את הנפח של הגוף, ולכן עלינו להבין מהו השטח הכלוא בין $\cos\theta$ לציר; השטח הוא 4 ולכן:

$$= \frac{1}{12}\cdot 4 = \frac{1}{3}$$

דרך נוספת: את $x^2+u^2 \le \frac{1}{4}$ אפשר לכתוב כך:

$$-\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{4}-u^2} \le x \le \sqrt{\frac{1}{4}-u^2}$$

ולכן:

$$V = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}\int_0^{2x} dzdxdu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}} 2xdxdu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\Big|_{-\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}} du$$

שוב, מכיוון שאנו לא רוצים שהאינטגרל יתאפס, $x^2\Big|_{-\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}} = 2\cdot x^2\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}}$, ולכן:

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2\cdot x^2\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-u^2}} du = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)du = 2\left(\frac{u}{4}-\frac{u^3}{3}\right)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$2\cdot\left(\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)-\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)\right) = 2\cdot\frac{4}{24} = \frac{1}{3}$$

5. הוכיחו שקיים כדור $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו בנקודה $(2,1,-1,-2)$ ופונקציות $f,g : B \to \mathbb{R}$ במחלקה C^1 כך שלכל נקודה $(x,y,z,w) \in B$ מתקיים:

$$\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2} = 17, f^2+g^2+w^2 = 29$$

<u>פתרון:</u>

אם נוסיף את התנאי:

$$f\left(2,1,-1,-2\right)=4,g\left(2,1-1,-2\right)=3$$

נקבל שאלה זהה לשאלה מחוברת התרגולים; פונקציות כאלו יקיימו בוודאי את הנדרש בשאלה.

אפשר לנסח את השאלה באופן הבא. האם המשוואות:

$$f^{2}+g^{2}+w^{2}=29,\frac{f^{2}}{x^{2}}+\frac{g^{2}}{y^{2}}+\frac{w^{2}}{z^{2}}=17$$

מגדירות את f,g כפונקציות של x,y,z,w בסביבת הנקודה $(2,1-1,-2,4,3)$.

לפי משפט הפונקציה הסתומה עלינו לבדוק את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{cc}F_{1f} & F_{1g}\\F_{2f} & F_{2g}\end{array}\right)$$

בה"כ, $F_1=\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}-17$, $F_2=f^2+g^2+w^2=29$ ולכן:

$$\left(\begin{array}{cc}F_{1f} & F_{1g}\\F_{2f} & F_{2g}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}2f & 2g\\\frac{2f}{x^{2}} & \frac{2g}{y^{2}}\end{array}\right)$$

ובנקודה שלנו:

$$\left(\begin{array}{cc}2 & 6\\8 & 6\end{array}\right)$$

וזו מטריצה הפיכה, ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה מערכת המשוואות $F_1,F_2=0$ מגדירות את f,g כפונקציות של x,y,z,w בסביבת הנקודה.

6. נניח ש-D,D' הם תחומים קומפקטיים ב-$\mathbb{R}^2$, וש-$\varphi:D'\to D$ שייכת למחלקה C^1.

עוד נניח ש-$f:D\to\mathbb{R}$ רציפה.

הראו על ידי דוגמה שאם φ לא חח"ע אז ייתכן ש:

$$\iint\limits_{D'}\left(f\circ\varphi\right)\left(u,v\right)\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|dudv\neq\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dxdy$$

<u>פתרון:</u>

נבחר: $D = D' = \{1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ בקואורדינטות קוטביות. זו טבעת עם רדיוס בין 1 לבין 2; היא סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

נתבונן בפונקציה: $\varphi : D' \to D$ המוגדרת על ידי: $\varphi(r,\theta) = (r, 2\theta)$.

ניקח את הפונקציה f להיות $f = 1$. היעקוביאן הוא 2, ואכן נקבל:

$$\iint\limits_{D'} 1 \cdot 2 \neq \iint\limits_{D} 1$$

אפשר גם לקחת את פונקציית האפס.