גרירה איננה קיבוצית (אסוציאטיבית): למשל $p, q, r =$ F. מצד אחד:

$$(p \to q) \to r \equiv (F \to F) \to F \equiv T \to F \equiv F$$

מצד שני:

$$p \to (q \to r) \equiv F \to (F \to F) \equiv F \to T \equiv T$$

נגדיר על $\mathbb{R}$ פעולות חדשות: $a \oplus b = a + b + 1$, $a \odot b = ab + a + b$, עם הפעולות האלו נקבל שדה.

א. מיהו האיבר הנייטרלי לחיבור? מיהו הנגדי של כל איבר?

<u>פתרון:</u>

אנחנו מחפשים איבר $0_{\mathbb{R}}$ כך ש: $a \oplus 0_{\mathbb{R}} = a$ לכל a.
כלומר:

$$a + 0_{\mathbb{R}} + 1 = a \Longrightarrow 0_{\mathbb{R}} = -1$$

כעת, הנגדי של כל a הוא $-a - 2$:

$$a \oplus (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1 = -1 = 0_{\mathbb{R}}$$

אפשר לשאול את עצמנו את השאלה הבאה: איזה איבר b נוסיף ל־a ונקבל $0_{\mathbb{R}}$? כלומר: $a \oplus b = 0_{\mathbb{R}}$, ומכאן:

$$a + b + 1 = -1 \Longrightarrow b = -a - 2$$

ב. הוכיחו במפורש את חוק הפילוג.

<u>פתרון:</u>

צ"ל:

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

נפתח כל אחד מהאגפים ונראה שמגיעים לאותה התוצאה:

$$a \odot (b \oplus c) = a (b \oplus c) + a + (b \oplus c) =$$

$$a (b + c + 1) + a + b + c + 1 = ab + ac + 2a + b + c + 1$$

באגף ימין:

$$(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (a \odot b) + (a \odot c) + 1 =$$

$$ab + a + b + ac + a + c + 1 = ab + ac + 2a + b + c + 1$$

והאגפים אכן שווים.