

## תרגיל בית 1

1. עבור התבניות הריבועיות הבאות:

$$Q(X) = 3x_1^2 - 7x_2^2 \quad \text{I.}$$

$$Q(X) = -5x_2^2 \quad \text{II.}$$

$$Q(X) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 \quad \text{III.}$$

$$Q(X) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2 \quad \text{IV.}$$

$$Q(X) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 \quad \text{V.}$$

- א. הציגו את התבנית הריבועית באמצעות מטריצה  $A$   
ב. מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה  $A$   
שרטטו את תמונה מעגל היחידה  $S^1$  תחת ההעתקה הליניארית  $T$  המוגדרת על ידי:  $(T(X)=Y) \quad y^j = a^j_k x^k$   
ג. לכסנו אורתוגונלית את המטריצה  $A$   
ד. השתמשו בהחלפת משתנים והפוך את התבנית הריבועית לתבנית ריבועית סטנדרטית (כלומר ללא מחוברים עם הביטוי  $x \cdot y$ )  
ה. שרטטו סקיצה של גרף התבנית הריבועית ב- $R^3$ , וציינו מהו חתך החרוט המתאים לתבנית זו.

## שאלה 2

$$c = (6, 1, -4) \quad b = (0, 4, 0.5) \quad a = (2, 3, -1) \quad \text{יהיו}$$

- I. חשבו את הזווית בין  $a$  ו- $b$   
II. חשבו את שטח של המקבילית הנוצרת ע"י  $c$  ו- $b$   
III. הראו ש- $a, b, c$  נמצאים באותו המישור

## שאלה 3

(א)

יהיו  $a, b, c, d$  ווקטורים ב- $R^3$ . הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad \text{א.}$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c) \quad \text{ב.}$$

(ב)

יהיו  $a, b$  שני ווקטורים אורתונורמליים ב- $R^3$ . הראו ש:

א. הווקטורים  $a, b, a \times b$  מהווים בסיס אורתונורמלי ב- $R^3$

ב.  $(a \times b) \times a = b$ ,  $(a \times b) \times b = -a$  והסבירו את המשמעות הגיאומטרית

#### שאלה 4

קבעו כיצד נראה הגרף של התבניות הריבועיות הבאות: פרבולויד אליפטי/פרבולויד היפרבולי/ציילינדר פרבולי (שרטט בצורה כללית במערכת צירים):

א.  $Q(X) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$

ב.  $Q(X) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

ג.  $Q(X) = -5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

ד.  $Q(X) = -4x_1^2 + 12x_1x_2 - 9x_2^2$

#### שאלה 5

מצאו משוואה ריבועית מהצורה  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  המתארת:

א. אליפסה שמרכזה ב  $(5, -3)$  ואורכי ציריה 2 ו-4

ב. היפרבולה שהאסימפטוטות שלה הן  $x = 6$  ו-  $y = 2$  (האסימפטוטות של ההיפרבולה  $xy = 1$  הן הצירים)

ג. פרבולה שקודקודה ב  $(1, 1)$  והיא סימטרית ביחס לישר  $y = x$

#### שאלה 6

נתונה המשוואה הריבועית  $x^2 - 4xy + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$

א. הראו שאוסף הנקודות המקיימות את המשוואה יוצר צורה של היפרבולה במישור  $[xy]$

ב. מצאו את מרכז ההיפרבולה. תזכורת: מרכז ההיפרבולה הוא נקודת החיתוך של האסימפטוטות.

ג. מהו המרחק בין קודקודי ההיפרבולה? (העבירו לצורה קנונית ומצאו מרחק בין נקודות חיתוך עם הצירים)

#### שאלה 7

נתונה הפונקציה  $y = x^3$

- מצאו פרמטרזציה של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים.
- הראו שהעקומה רגולרית.
- האם  $\delta(u) = (u^2, u^6)$  פרמטרזציה רגולרית של הגרף?
- חשבו את הווקטור המשיק והווקטור הנורמל בכל נקודה על העקומה. הנורמל הוא הווקטור הניצב למשיק, המתקבל מסיבוב של  $\pi/2$  כנגד השעון של המשיק.
- מצאו את עקמומיות העקומה (היעזרו בנוסחת Bateman)
- מהי העקמומיות המינימאלית של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

## שאלה 8

נתונה המשוואה  $x^2 + y^2 = 4$

- חשבו את העקמומיות של העקומה המוגדרת ע"י המשוואה בעזרת נוסחת Bateman.
- מצאו פרמטרזציה של העקומה
- חשבו את מהירות העקומה לפי הפרמטרזציה שמצאתם בסעיף ב'. במידה והמהירות שונה מ-1, מצאו פרמטרזציית אורך קשת לעקומה
- חשבו את העקמומיות של העקומה לפי ההגדרה  $k = |\gamma''|$

## שאלה 9

נתונה עקומה  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  המוגדרת ע"י הפרמטרזציה  $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$

- שרטט עקומה זו במערכת צירים
- מצא משוואה ריבועית  $F(x, y) = 0$  שמגדירה עקומה זו.
- חשב את עקמומיות העקומה. הבע את העקמומיות כפונקציה של  $x$ . (היעזר בנוסחת Bateman)
- מצא את הנקודות על העקומה בהן עקמומיות מקסימאלית ועקמומיות מינימאלית. מהי עקמומיות זו? מהו רדיוס העקמומיות בנקודות אלו?

## שאלה 10

תהי  $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{(2+x^2)^3}$ , מצאו פרמטריזציית אורך קשת לגרף של פונקצייה זו.

## שאלה 11

הוכיחו כי לעקומה  $\gamma(t)$  יש מהירות קבועה אם ורק אם  $\gamma'$  מאונך ל  $\gamma''$ . רמז: גזרו את התבוננו בנגזרת לפי  $t$  של מכפלה פנימית מסויימת.

### שאלה 12

חשב את עקמומיות העקומה  $\gamma$  המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)

א.  $x^2 + y^2 + 4y + 1 = 2x$

ב.  $ax^2 + by^2 = 1$

### שאלה 13

חשבו את העקמומיות של העקומות באות:

א.  $\gamma(t) = (t, \cosh t)$

ב.  $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$

### שאלה 14

חקרו את העקומה  $\gamma(t) = \left( \cos t, \frac{1}{2} \sin 2t \right)$  ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

א. ציירו אותה.

ב. חשבו את המשיק והנורמל בכל נקודה.

ג. האם העקומה במהירות יחידה?

### שאלה 15

נתונה עקומה  $\gamma$  בפרמטר טבעי  $s$ , תארו כיצד משפיעות העתקות הבאות על העקמומיות של  $\gamma$  (כלומר מצאו את העקמומיות של העקומה המתקבלת לאחר ביצוע הפעולה).

א. החלפת האוריינטציה במישור:  $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ , העקומה המתקבלת היא

$\beta(s) = T \circ \gamma(s)$

ב. היפוך כיוון התנועה של העקומה:  $\beta(s) = \gamma(-s)$

ג. הזזת הפרמטר הטבעי:  $\beta(s) = \gamma(s + s_0)$