חדו"א 2 להנדסת מכונות

תרגיל מס' 10 - אינטגרל כפול ומשולש

<u>תרגיל 1</u>: חשב:

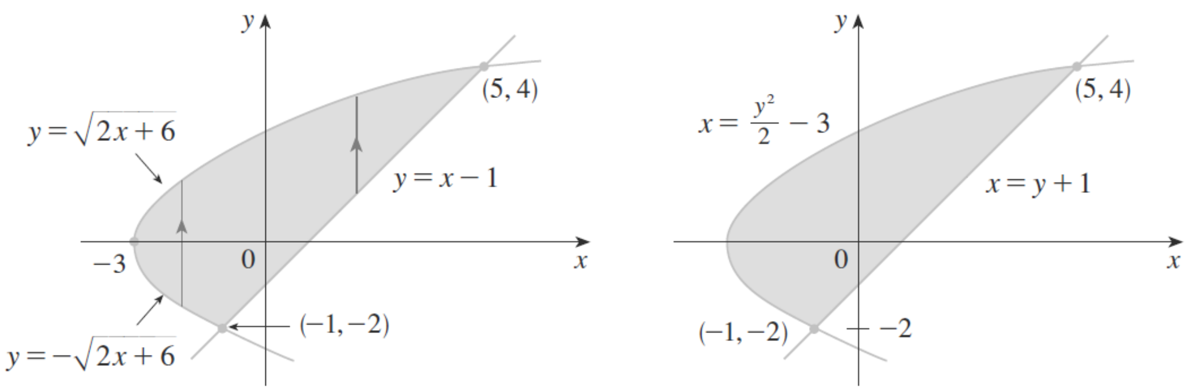
$$\iint_D xydxdy$$

כאשר D הוא התחום במישור החסום ע"י העקומות:

$$y = x - 1, \qquad y^2 = 2x + 6$$

<u>פיתרון</u>: בתרגול הקודם, ראינו כי סדר האינטגרציה לא משנה את תוצאת האינטגרציה, אך יש מקרים בהם ניתן לפתור אך ורק בסדר מסוים. בדוגמא הזאת, ניתן לפתור בשני סדרי האינטגרציה, אך פשוט יותר לפתור בסדר מסוים.

נתבונן בתחום D:



(a) D as a type I region

(b) D as a type II region

<u>הערה</u>: שטח מסוג 1 הוא שטח הנמצא בין הגרפים של שתי פונקציות רציפות של x במישור. באופן דומה, שטח מסוג 2, הוא שטח הנמצא בין הגרפים של שתי פונקציות רציפות של y.

בשאלה זו, D הוא שטח מסוג 1 וגם מסוג 2 ולכן ניתן לבצע את האינטגרציה בשני הסדרים.

מצד שני, ניתן לראות כי קל יותר לבצע את האינטגרציה כאשר מסתכלים על D כשטח מסוג 2, כי באופן זה אין צורך לחלק את D לשני תחומי אינטגרציה שונים (משמאל לנקודה $(-1,-2)$ ומימינה).

<u>נפתור</u>:

$$\iint_D xydxdy = \int_{-2}^{4} ydy \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xdx = \int_{-2}^{4} ydy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left((y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right)^2\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left(y^2 + 2y + 1 - \frac{y^4}{4} + 3y^2 - 9\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} -\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8ydy =$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}y^6+y^4+\frac{2}{3}y^3-4y^2\right]_{-2}^{4}=\boxed{36}$$

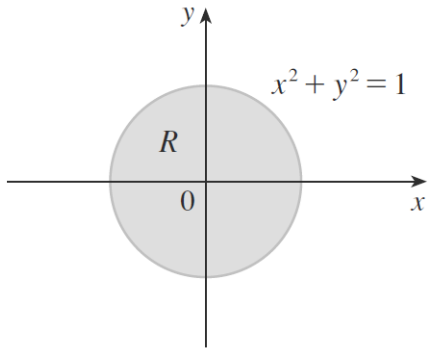
אם היינו מסתכלים על D כשטח מסוג 1, היינו מקבלים:

$$\iint_D xydxdy=\int_{-3}^{-1}xdx\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}}ydy+\int_{-1}^{5}xdx\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}}ydy$$

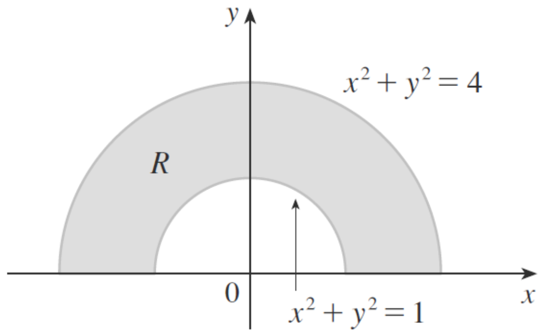
וברור כי פיתרון האינטגרל האחרון דורש יותר עבודה.

קואורדינטות פולריות

נניח כי אנו רוצים לבצע אינטגרציה על תחום מאחת הצורות הבאות:



(a) $R=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$



(b) $R=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant \pi\}$

במקרה זה, שימוש בקואורדינטות פולריות פשוט יותר מאשר קואורדינטות קרטזיות.

הקשר בין קואורדינטות פולריות וקרטזיות:

$$x=rcos\theta,\qquad y=rsin\theta,\qquad x^2+y^2=r^2$$

נשתמש בנוסחת חילוף המשתנים (תרגול 9) ונקבל:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f\big(x(r,\theta),y(r,\theta)\big)|J(r,\theta)|drd\theta$$

נחשב את הפרמטרים הדרושים:

$$x(r,\theta)=rcos\theta,\qquad y(r,\theta)=rsin\theta,$$

$$J(r,\theta)=det\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{pmatrix}=rcos^2\theta+rsin^2\theta=r$$

$$\Rightarrow\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(rcos\theta,rsin\theta)rdrd\theta}$$

<u>תרגיל 2</u>: חשב את האינטגרל:

$$\iint_D 3x+4y^2dxdy$$

כאשר D הוא השטח החסום ע"י שני חצאי המעגלים $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$ בחצי המישור העליון.

<u>פיתרון</u>: התחום D מתואר בשרטוט האחרון (צד ימין). ניתן לכתוב:

$$D = \{(x,y): y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

בקואורדינטות פולריות, התיאור פשוט הרבה יותר:

$$\Delta = \{(r,\theta): 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

ניתן להשתמש בנוסחת חילוף המשתנים לקואורדינטות פולריות ולקבל:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(rcos\theta, rsin\theta)rdrd\theta = \iint_\Delta (3rcos\theta + 4r^2sin^2\theta)rdrd\theta =$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_1^2 3r^2cos\theta + 4r^3sin^2\theta dr = \int_0^\pi d\theta\, [r^3cos\theta + r^4sin^2\theta]_{r=1}^{r=2} =$$

$$= \int_0^\pi 8cos\theta + 16sin^2\theta - cos\theta - sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \overbrace{7cos\theta}^{\text{האינטגרל מתאפס}} + 15sin^2\theta d\theta =$$

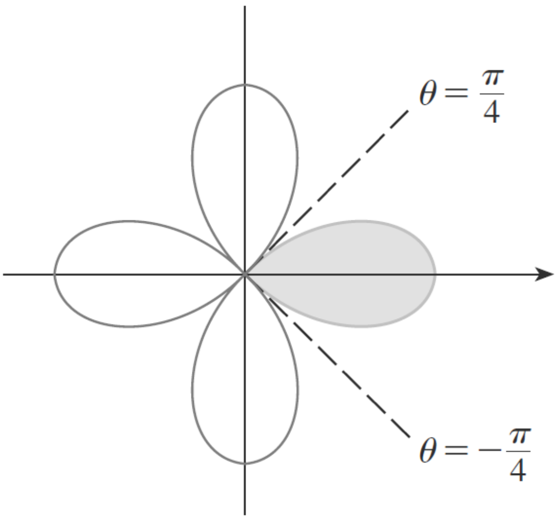
$$= \int_0^\pi \frac{15}{2}\left(1 - \overbrace{cos2\theta}^{\text{האינטגרל מתאפס}}\right)d\theta = \frac{15}{2}[\theta]_0^\pi = \boxed{\frac{15\pi}{2}}$$

חישוב שטח ע"י איטגרל כפול

אם D הוא תחום במישור, ניתן לחשב את השטח של D ע"י איטגרציה של הפונקציה הקבועה $f(x,y) = 1$ על השטח D:

$$Area(D) = \iint_D dxdy$$

<u>תרגיל 3</u>: חשב את השטח החסום ע"י עלה אחד של הורד: $r = cos2\theta$.



<u>פיתרון</u>: מהשרטוט, ניתן לראות כי:

$$\Delta = \left\{(r,\theta): -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq cos2\theta\right\}$$

$$\Rightarrow A(\Delta) = \iint_D dxdy = \iint_\Delta \overbrace{f(rcos\theta, rsin\theta)}^{1} rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{cos2\theta} rdr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{cos2\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + cos4\theta) d\theta = \cdots$$

$$\{4\theta = u, d\theta = 4du, -\pi \le u \le \pi\}$$

$$\ldots = \frac{\pi}{8} + \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cos(u)du}^{0} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

<u>תרגיל 4</u>: חשב:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

<u>פיתרון</u>: מה הקשר של התרגיל הזה?!

ראשית, למרות שזהו אינו אינטגרל כפול, ברור שלא ניתן לפתור את התרגיל בכלים של חדו"א1 (כי אין ל- e^{-x^2} פונקציה קדומה). נפתור באופן הבא:

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \overset{\text{פולריות}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr = \{r^2 = u, 2rdr = du\} =$$

$$= \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi[-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi[-0 - (-1)] = \pi$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A^2} = \boxed{\sqrt{\pi}}$$

<u>תרגיל בונוס</u>: השתמש בתוצאה האחרונה לחישוב האינטגרלים:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \qquad \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

<u>תרגיל 5</u>: (12.8.2008 – חדו"א 2 למכונות, שאלה 6 א')

תחום D מוגדר ע"י אי השוויונים:

$$y \ge 1, \qquad y \le \sqrt{3}x, \qquad r \le 2sin\theta$$

(כאן r, θ קואורדינטות קוטביות). צייר את התחום וחשב את האינטגרל הכפול:

$$I = \iint_D 2dxdy$$

<u>פיתרון</u>: ראשית כל, יש להבין מהו הקו $r = 2sin\theta$. נשים לב:

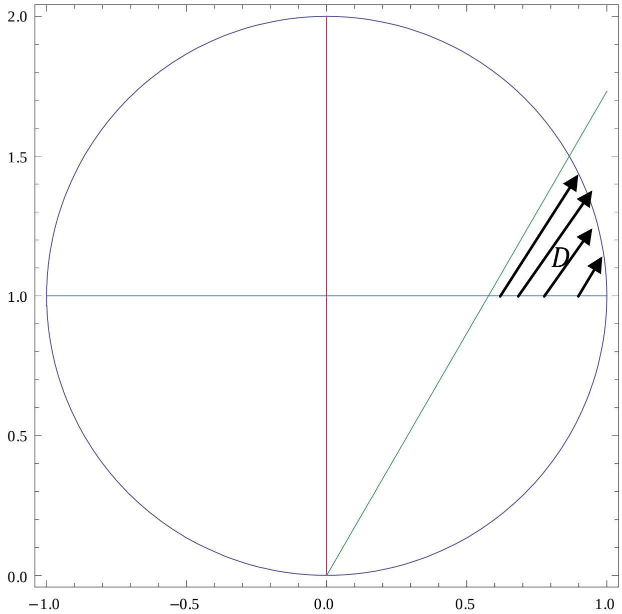
$$x = rcos\theta, y = rsin\theta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 = 4sin^2\theta = 2 \cdot 2sin^2\theta = 2 \cdot \overbrace{(2sin\theta)}^{r} \cdot sin\theta = 2rsin\theta = 2y$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

כלומר, הקו $r = 2sin\theta$ הוא מעגל ברדיוס 1 עם מרכז בנקודה (0,1).

כעת, ניתן לצייר את התחום:



על מנת לחשב את האינטגרל, נשתמש בקואודינטות פולריות. נחשב את הערכים של r,θ בנקודות הגבול של התחום D:

$$y=1 \Longrightarrow rsin\theta=1 \Longrightarrow r=\frac{1}{sin\theta} \Longrightarrow \frac{1}{sin\theta} \le r \le 2sin\theta$$

על המעגל בצד ימין:

$$y=1 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow \theta = arctan\,(1) = \frac{\pi}{4}$$

על הקו $y=\sqrt{3}x$:

$$\theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) = arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

נפתור את האינטגרל:

$$\Longrightarrow \iint_D 2dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{sin\theta}}^{2sin\theta} 2rcos\theta rdr = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos\theta d\theta \int_{\frac{1}{sin\theta}}^{2sin\theta} r^2 dr =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos\theta d\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{1}{sin\theta}}^{2sin\theta} = \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos\theta \left(8sin^3\theta - \frac{1}{sin^3\theta}\right) d\theta = \{sin\theta = t\} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(8t^3 - \frac{1}{t^3}\right) dt = \frac{2}{3}\left[2t^4 + \frac{1}{2t^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}\left[2\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} - 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{9}{8} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{27+16-12-24}{24}\right] = \boxed{\frac{7}{36}}$$

אינטגרל משולש

תרגיל 6: חשב:

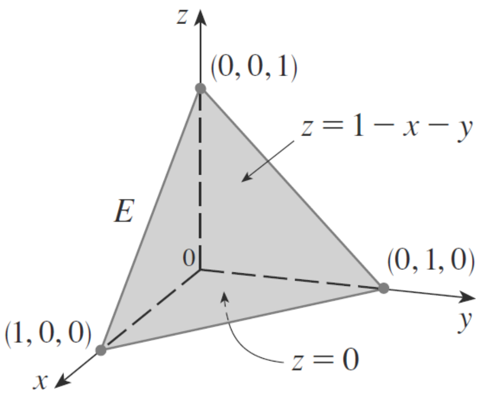
$$\iiint_E zdxdydz$$

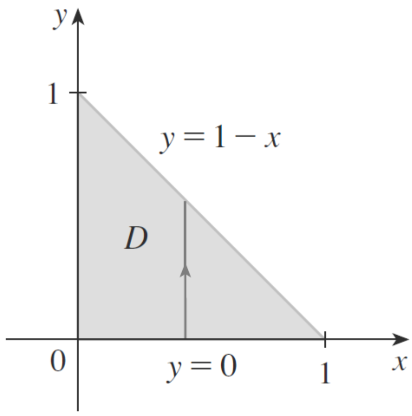
כאשר E הוא הטטראדר שחסום ע"י המישורים:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad x + y + z = 1$$

פיתרון:

כאשר פותרים אינטגרל משולש, מומלץ לשרטט שתי דיאגרמות: אחת של הנפח E עליו מבוצעת האינטגרציה ושניה של ההיטל של E, D על מישור xy (או מישור אחר, בהתאם לסוג הנפח):





הגבול התחתון של הטטראדר הוא מישור xy ואילו הגבול העליון שלו הוא המישור $x + y + z = 1$ או $z = 1 - x - y$.

החיתוך של המישורים $z = 1 - x - y$ ו- $z = 0$ (מישור xy) הוא הקו הישר $y = 1 - x$ (כפי שניתן לראות בשרטוט הימני). התחום E:

$$E = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

נחשב את האינטגרל:

$$\iiint_E zdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{(1 - x - 1 + x)^3}{3} + \frac{(1 - x - 0)^3}{3} dx =$$

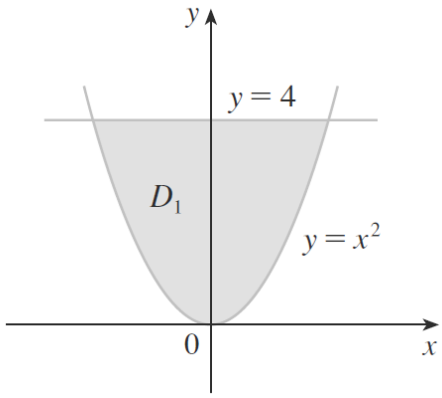
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1 - x)^3}{3} dx = +\frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{24}}$$

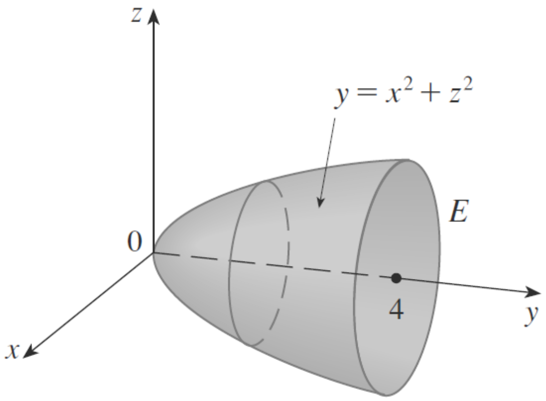
<u>תרגיל 7</u>: חשב:

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$$

כאשר E הוא התחום החסום בין הפרבולוידה $y=x^2+z^2$ והמישור $y=4$.

<u>פיתרון</u>: נשרטט את התחום E ואת היטלו על מישור xy:





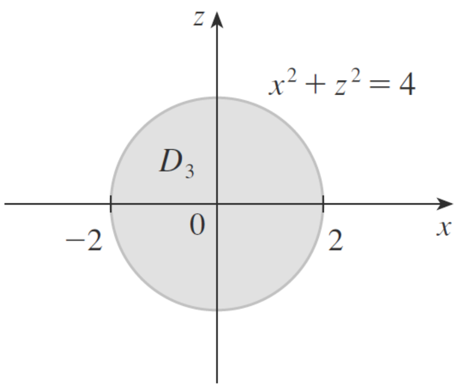
ניתן לראות כי ההיטל של התחום E, D_1 על מישור xy הוא תחום פרבולוידי התחום ע"י הפרבולה $y=x^2$. מתוך המשוואה $y=x^2+z^2$ אנו מקבלים $z=\pm\sqrt{y-x^2}$ ולכן E נתון ע"י:

$$E=\left\{(x,y,z): -2\le x\le 2, x^2\le y\le 4, -\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}\right\}$$

ניתן לכתוב את האינטגרל:

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz$$

למרות שהביטוי האחרון נכון, קשה לפתור את האינטגרל. כדאי לנסות ולהטיל את E על מישור xz במקום על מישור xy (כך ננצל את הסימטריה של תחום האינטגרציה בצורה טובה יותר):



ההיטל D_3 הוא העיגול $x^2+z^2\le 4$ וניתן לכתוב את האינטגרל בצורה הבאה:

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz=\iint_{D_3}dxdz\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy=$$

$$=\iint_{D_3}\sqrt{x^2+z^2}\,(4-x^2-z^2)\,dxdz$$

למרות שניתן לפתור את האינטגרל בצורה הישירה הבאה:

$$\iint_{D_3} \sqrt{x^2+z^2}(4-x^2-z^2)dxdz = \int_{-2}^{2} dz \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \sqrt{x^2+z^2}(4-x^2-z^2)dx$$

קל יותר לעבור לקואורדינטות פולריות במישור xz:

$$x = rcos\theta, \qquad z = rsin\theta$$

$$\Rightarrow \iint_{D_3} \sqrt{x^2+z^2}(4-x^2-z^2)dxdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(4-r^2)rdr = 2\pi \int_0^2 4r^2 - r^4 dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{1}{5}\cdot 32\right) = 2\pi\left(\frac{64}{15}\right) = \boxed{\frac{128\pi}{15}}$$