פתרון תרגיל 7

שאלה 1

הוכח או הפרך:

א. אם $f(x)+g(x)$ רציפה ב- x_0 אז גם $f(x), g(x)$ רציפות ב- x_0.

ב. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x)+g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

ג. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x)\cdot g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

ד. אם $f(x)$ גזירה ו- $g(x)$ רציפה ב - x_0 אזי $f(x)+g(x)$ רציפה ב - x_0

ה. אם $f(x)$ גזירה ו- $g(x)$ רציפה ב - x_0 אזי $f(x)+g(x)$ גזירה ב - x_0

פתרון:

א) הטענה אינה נכונה

דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ -1+x & x\geq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1+x & x<0\\ 1+x & x\geq 0\end{cases}$$

שתי הפונקציות אינן רציפות ב־0 אבל הסכום שלהן $2x$ כן רציפה שם

ב) הטענה נכונה

נניח בשלילה ש־$f(x)+g(x)=h(x)$ רציפה ב־x_0 אזי $g(x)=h(x)-f(x)$ תהיה רציפה , סתירה

ג) הטענה אינה נכונה,

דוגמה נגדית:

$f(x)=0$ בכל x ממשי והיא גם רציפה בנקודה 0

$g(x)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ -1 & x>0\end{cases}$ אינה רציפה ב־0, אבל המכפלה $f(x)\cdot g(x)=0$ כל רציפה ב־$x=0$

ד) הטענה נכונה,

אם $f(x)$ גזירה אז היא גם רציפה ואז באריתמטיקה של פונקציות רציפות גם $f(x) + g(x)$ רציפה.

ה) הטענה לא נכונה,

דוגמא נגדית:

$f(x) = x$ בכל x היא פונקציה גזירה בפרט בנקודה 0.

$g(x) = |x|$ בכל x היא פונקציה רציפה אבל ב - 0 היא לא גזירה כי $\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1 \neq \lim_{x\to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -1$

אז גם $f(x) + g(x)$ לא גזירה ב - 0 כי $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x-0} = 2 \neq \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x-0} = 0$

שאלה 2

מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

א. $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$

פתרון: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות רציפות.

ב. $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x^3}$

פתרון: $D(f) = (-\infty, 1]$

הפונקציה רציפה כהרכבה של $x^2 - x^3$ ו- $\sqrt[4]{x}$ לכל נקודה $x < 1$ חוץ מ-0 כי $\sqrt[4]{x}$ לא רציפה ב-0 כי לא מוגדרת מצד שמאל. אולם, בנק' 0, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$ אז הפונקציה גם רציפה ב-0. הפונקציה לא מוגדרת מימין ב-1 אז לא רציפה ב-1.

ג. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x \geq 2, x \neq 4 \\ \frac{2}{3} & x = 4 \end{cases}$

פתרון: $D(f) = [2,\infty)$. לכל $x \in (2,4) \cup (4,\infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)} = st\left(\frac{2(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})}{\sqrt{9+2\Delta x}+3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $x = 4 + \Delta x,\ \Delta x \approx 0,\ \Delta x \neq 0$.

קיבלנו $\lim_{x\to 4} f(4) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \neq \frac{2}{3} = f(4)$ ולכן $x = 4$ נקודת אי רציפות סליקה.

הפונקציה לא מוגדרת משמאל ב-2 אז היא לא רציפה ב-2.

שאלה 3

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

א. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

פתרון: $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב-$x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

(קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס).

הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

ב. $f(x)=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

פתרון: $D(f)=[-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$. בכל $(-7,\infty)\setminus\{-2,2\}$ הפונקציה רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות

נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת **אי רציפות סליקה**.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)}=st\left(\frac{\sqrt{5+\Delta x}-3}{\Delta x(-4+\Delta x)}\right)$$

כאשר $x=-2+\Delta x,\ \Delta x\approx 0,\ \Delta x>0$. במקרה זה המספר $\frac{\sqrt{5+\Delta x}-3}{\Delta x(-4+\Delta x)}$ הינו מספר אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x=-2$ אינו קיים

ולכן $x=-2$ נקודת **אי רציפות מסוג שני**.

הפונקציה לא מוגדרת משמאל ב-7- אז היא לא רציפה ב-7-.

שאלה 4

עבור איזה ערך של a פונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 0\\ \frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} & x>0\end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x\neq 0$.

נבדוק רציפות בנקודה $x=0$, נרצה שיתקיים:

$$lim_{x\to 0^+}f(x)=lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=2$$

$$lim_{x\to 0^-}f(x)=lim_{x\to 0^-}(5x+2)=2$$

$$lim_{x\to 0^+}f(x)=lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}\right)=lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2}\frac{\sqrt{1+ax^2}+1}{\sqrt{1+ax^2}+1}\right)=$$

$$=lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)}=\frac{a}{2}$$

ולכן כדי שהגבול יהיה קיים נדרוש ש־$\frac{a}{2}=2$ ולכן $a=4$.

שאלה 5

באיזה נקודות הפונקציות הבאות גזירות?

א. $f(x)=\begin{cases}2x+\sin x & x\le 5\\ \cos x-12 & x>5\end{cases}$

בנקודה $x=5$ הפונקציה לא גזירה כי עבור $0<\Delta x\approx 0$ נקבל כי $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(5+\Delta x)-12-(10+\sin 5)}{\Delta x}$ אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי. (הסבר: המונה משמעותי כי $-1\le\cos(5+\Delta x)\le 1$, וכן $-1\le\sin 5\le 1$, לכן המונה הוא בין -24 ל- -20, כלומר משמעותי. המכנה אינפי', לכן משמעותי חלקי אינפי' הוא אינסופי).

בכל נקודה אחרת הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. לכן לסיכום: f גזירה לכל $x\neq 5$.

ב. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le -3\\ x^3+37 & x>-3\end{cases}$

נבדוק גזירות בנקודה $x=-3$:

עבור $0<\Delta x\approx 0$ נקבל:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(-3+\Delta x)^3+37-(3^2+1)}{\Delta x}=\frac{-27+27\Delta x-9\Delta x^2+\Delta x^3+37-10}{\Delta x}=27-9\Delta x+\Delta x^2$ כלומר

$st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=27$.

עבור $0>\Delta x\approx 0$ נקבל:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(-3+\Delta x)^2+1-(3^2+1)}{\Delta x}=\frac{9-6\Delta x+\Delta x^2+1-10}{\Delta x}=-6+\Delta x$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=-6$.

קיבלנו שתי תוצאות שונות עבור שני ערכי Δx שונים לכן הפונקציה לא גזירה בנקודה $x=-3$.

מצד שני הפונקציה גזירה בכל נקודה אחרת לפי כללי הגזירה שלמדנו.

לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x\neq -3$.

ג. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ (x+1)^2 & x\geq 0 \end{cases}$

לכל $x\neq 0$ הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. נשאר לבדוק מה קורה בנקודה $x=0$:

עבור $0<\Delta x\approx 0$:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x+1)^2-(0+1)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2+2\Delta x}{\Delta x}=2+\Delta x$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$.

ועבור $0>\Delta x\approx 0$:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+1-(0+1)^2}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$ כלומר $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$.

כלומר קיבלנו ש- $st(\frac{\Delta y}{\Delta x})=2$ לכל $0\neq\Delta x\approx 0$, לכן הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ (ונגזרתה 2).

לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$.

שאלה 6

חשב את הגבולות הבאים בעזרת כללים (אריתמטיקה של גבולות, רציפות, כפל בצמוד וכו')

1) $lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}$

פתרון:

$lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

2) $lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

פתרון:

$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}=lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{9}$

3) $lim_{x\to 1}\frac{sin(x)ln(x+1)}{x^2-4}$

פתרון:

הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$ ולכן הגבול שלה שווה לערך שלה בנקודה, הציבו את הנקודה וקבלו את הגבול.

פתרון: $D(f) = (-\infty, 1]$

הפונקציה רציפה בהרכבה של פונקציות רציפות לכל נקודה x < 1.

הפונקציה גם רציפה בנקודה 1 כי $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 0$