תרגיל 13

1. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים, אז הוא יחיד.

פתרון:

נניח בשלילה כי קיימים $L_1 \neq L_2 \in \mathbb{R}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$.

כיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ נקבל כי לכל $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_N \approx L_1$, בדומה נקבל כי $a_N \approx L_2$ ולכן מטרנזיטביות של קירבה אינסופית $L_1 \approx L_2$.

לכן $st(L_1) = st(L_2)$ אבל כיוון ש $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ נקבל $L_1 = st(L_1) = st(L_2) = L_2$ בסתירה!

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרה חסומה, אזי היא סדרת קושי.

(ב) אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי , אזי היא חסומה.

פתרון:

(א) לא נכון. נפריך ע"י דוגמה נגדית:

ניקח את הסדרה $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. היא חסומה כיוון ש $|a_n| = 1 \leq 1$

ברור שהיא לא סדרת קושי כיוון שעבור $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ זוגי נקבל כי a_N אינסופי חיובי,

ולכן $N+1 \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ אי־זוגי נקבל כי a_{N+1} אינסופי שלילי ולכן כמובן $a_N \not\approx a_{N+1}$.

(ב) הוכחה:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$סדרת קושי, אזי לפי משפט היא מתכנסת לגבול L. כלומר לכל $N \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ מתקיים $a_N \approx L$, ולכן a_N סופי, כלומר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

3. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שמתקיים $|a_n - a_{n-1}| < p^n$ עבור $0 < p < 1$. הוכיחו כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

פתרון:

נתבונן ב $a_n - a_m$ עבור $n > m$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + ... + a_{m+1} - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} + a_{n-2}| + ... + |a_{m+1} - a_m|$$

$$\leq p^n + p^{n-1} + ... + p^{m+1} = p^{m+1}\left(p^{n-m+1} + ... + 1\right) = p^{m+1}\left(\frac{1-p^{n-m}}{1-p}\right) = \frac{p^{m+1} - p^{n+1}}{1-p}$$

כעת אם ניקח $N, M \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ נקבל $|a_N - a_M| \leq \frac{p^{M+1} - p^{N+1}}{1-p} \approx 0$ כדרוש.

4. עבור הסדרות הבאות מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרה:

(א) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

(ב) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

פתרון:

(א) עבור $n=2k$ זוגי נקבל $a_{2k}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)\to 1$ ולכן גבול חלקי הוא 1

עבור $n=2k+1$ אי זוגי נקבל: $a_{2k+1}=\left(-1+\frac{1}{2k+1}\right)\to -1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1-

נראה שאין גבולות חלקיים נוספים: נניח בשלילה שיש גבול חלקי נוסף $L\neq \pm 1$. לפי ההגדרה יש תת סדרה אינסופית השואפת אליו, ולכן היא בהכרח מכילה אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים אי זוגיים. נניח בלי הגבלת הכלליות שיש אינסוף איברים אי זוגיים, ולכן נתבונן בתת סדרה המורכבת מאיברים אלה. מצד אחד הם שואפים ל־-1 אבל מצד שני הם שואפים ל־L. ולכן מיחידות הגבול נקבל $L=-1$ בסתירה להנחה.

ולכן ± 1 הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

(ב) עבור $n=2k$ זוגי נקבל: $a_{2k}=\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi k\right)=0$ ולכן גבול חלקי הוא 0

עבור $n=4k+1$ נקבל: $a_{4k+1}=\sin\left(\frac{4k\pi+\pi}{2}\right)=1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1.

עבור $n=4k+3$ נקבל: $a_{4k+3}=\sin\left(\frac{4k\pi+3\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ ולכן גבול חלקי נוסף הוא 1-.

נראה שאין גבולות חלקיים נוספים: נניח בשלילה שיש גבול חלקי נוסף $L\neq 0,\pm 1$. לפי ההגדרה יש תת סדרה אינסופית השואפת אליו, ולכן היא בהכרח מכילה אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים השקולים ל־$1mod4$או אינסוף איברים השקולים ל־ $3mod4$. נניח בלי הגבלת הכלליות שיש אינסוף איברים זוגיים, ולכן נתבונן בתת סדרה המורכבת מאיברים אלה. מצד אחד הם שואפים ל־אפס, אבל מצד שני הם שואפים ל־L. ולכן מיחידות הגבול נקבל $L=0$ בסתירה להנחה.

ולכן $0,\pm 1$ הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

5. הוכיחו לפי היינה כי הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ לא קיים.

פתרון:

נמצא סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות לאפס כך ש

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(e^{\frac{1}{a_n}}\right)\neq\lim_{n\to\infty}\sin\left(e^{\frac{1}{b_n}}\right)$$

ידוע כי $\sin$ היא פונקציה מחזורית ובפרט מקיימת $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1$ לכל $k\in\mathbb{N}$

נחפש סדרה כך ש

$$e^{\frac{1}{a_n}}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

כלומר נגדיר

$$a_n=\frac{1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}$$

מתקיים: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$וגם $a_n\neq 0$ לכל n וכן, $\lim_{n\to\infty}\sin\left(e^{\frac{1}{a_n}}\right)=1$.

בדומה ניקח

$$b_n=\frac{1}{\ln\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)}$$

מתקיים: $\lim_{n\to\infty}b_n=0$, $b_n\neq 0$ לכל n, ו $\lim_{n\to\infty}\sin\left(e^{\frac{1}{a_n}}\right)=-1$.

ולכן הגבול לא קיים.

6. תהי

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

חשבו את הגבול בנקודות בהן הוא קיים, ואחרת, הוכיחו כי הוא לא קיים בעזרת הגדרת הגבול לפי היינה.

רמז: השתמשו בגבול מהתרגול: $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\cdot a\rfloor}{n}=a$

פתרון:

עבור $x_0\neq 0$ נראה כי הגבול לא קיים, ע"י ההגדרה לפי היינה:

ידוע כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\cdot a\rfloor}{n}=a$. על מנת שיתקיים $a_n\neq x_0$ לכל n נגדיר $a_n=\frac{\lfloor n\cdot x_0\rfloor+1}{n}$ ואז

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\cdot x_0\rfloor}{n}+\frac{1}{n}=x_0$$

וכיוון שלכל n מתקיים $a_n\in\mathbb{Q}$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\right)^2=x_0^2$$

בדומה נגדיר $b_n=\frac{\lfloor n\cdot x_0\rfloor+\pi}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n\cdot x_0\rfloor}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}=x_0$$

וכיוון שלכל n $a_n\notin\mathbb{Q}$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty}f\left(b_n\right)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

וכיוון ש $x_0^2\neq 0$ לכל $x_0\neq 0$, נקבל כי הגבול לא קיים לפי היינה.

עבור $x=0$:

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$

$$st\left(f\left(\Delta x\right)\right)=\begin{cases}\left(\Delta x\right)^2\\ 0\end{cases}=0$$

ולכן בכל מקרה נקבל

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=0$$

7. קבעו התכנסות של הטורים הבאים:

(א)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}}$$

(ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + n^2}$$

(ד)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n}$$

פתרון:

(א) ברור כי $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$ ולכן $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n}$. כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ מתבדר לפי מבחן ההשואה.

(ב)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 1$$

כלומר תנאי הכרחי להתכנסות לא מתקיים, ולכן הטור מתבדר.

(ג) $\frac{1}{3^n+n^2} < \frac{1}{n^2}$ ולכן ממשפט ההשואה, הטור מתכנס.

(ד) נשתמש במבחן ההשואה עם $\frac{1}{n^2}$.

לכל $n \geq 4$ מתקיים:

$$n^2 - 3n = n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right) \geq n^2 \cdot \frac{1}{4} \implies \frac{1}{n^2-3n} \leq \frac{4}{n^2}$$

וכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נקבל כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n}$ מתכנס, לפי מבחן ההשואה.