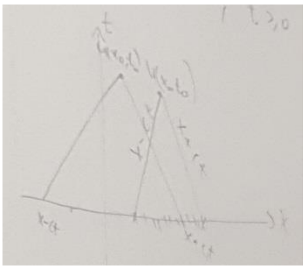
משוואת גלים על חצי מיתר

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x < \infty \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

שני התנאים האמצעיים הם תנאי התחלה והתנאי האחרון הוא תנאי שפה.



מתנאי ההתחלה $u(0,0) = f(0)$, ומתנאי השפה $u(0,0) = 0$ ולכן:

$$f(0) = 0$$

על מנת שהפתרון יהיה רציף צריך שיתקיים $f(0) = 0$ שנקרא תנאי תאימות.

הרעיון לפתרון של בעיית חצי מיתר היא להוסיף גל דמיוני עבור $x < 0$ שמבטל את תנאי השפה ומאפשר להשתמש בנוסחת דלאמבר.

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(0) = -f(0)$$

$$2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

<u>לכן נבחר הרחבה אי זוגית:</u>

נסמן $\tilde{f}$ ו - $\tilde{g}$ הרחבות אי זוגיות של f ו – g בהתאמה על כל $\mathbb{R}$.

$$\tilde{f} = f_{odd}(x) = \begin{cases} f(x), & x \ge 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g} = g_{odd}(x) = \begin{cases} g(x), & x \ge 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

נסמן $\tilde{u}$ פתרון של משוואת הגלים ב - $(-\infty, \infty)$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x), & -\infty < x < \infty \\ \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

כעת נוכל להיעזר בנוסחת דלאמבר כיד למצוא את $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{f}(x-ct) + \tilde{f}(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s)ds$$

<u>נתבונן בפתרון של $\tilde{u}$ ונחלק למקרים:</u>

נחלק לשני מקרים –

1) אם $x-ct\geq 0$.

2) אם $x-ct<0$.

<u>מקרה I:</u>

$$0\leq x-ct<x+ct$$

לכן:

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$

במקרה ש - $x-ct\geq 0 \Leftarrow$ נוכל לומר ש - $\tilde{u}=u$ ונוכל להשתמש בנוסחת דלאמבר.

<u>מקרה $\mathbb{I}$:</u>

$$x-ct<0<x+ct$$

לכן:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t)&=\frac{-f(ct-x)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{0}\tilde{g}(s)ds+\int_{0}^{x+ct}\tilde{g}(s)ds\right]\\&=\frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{0}-g(-s)ds+\int_{0}^{x+ct}g(s)ds\right]\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$w=-s$$

$$dw=-ds$$

$$s\to 0\,,w\to 0$$

$$s\to x-ct\,,w\to ct-x$$

לכן:

$$\int_{ct-x}^{0} g(w)dw \Rightarrow \int_{ct-x}^{0} g(s)ds = -\int_{0}^{ct-x} g(s)ds$$

ולכן:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\left[-\int_{0}^{ct-x} g(s)ds + \int_{0}^{x+ct} g(s)ds\right]$$
$$= \frac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)ds$$

<u>לסיכום:</u>

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\,, & x-ct \geq 0 \\ \dfrac{f(x+ct)-f(ct-x)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)ds\,, & x-ct < 0 \end{cases}$$

<u>הערה:</u>

החלפנו את תנאי השפה שלנו:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x < \infty \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

מיתר נע – זה מצב שבו בנקודה מסוימת, למשל $x_0 = 0$ הערך של הנגזרת שווה ל – 0.

<u>תנאי התאימות:</u>

מתנאי ההתחלה, אם נגזור לפי x:

$$u_x(x,0) = f'(x)$$

$$u_x(0,0) = f'(0)$$

לעומת זאת, מהתנאי שפה, אם נציב $t = 0$:

$$u_x(0,0) = 0$$

לכן:

$$f'(0) = 0$$

כעת, מתנאי השפה:

$$u_{xt}(0,t) = 0$$

$$u_{xt}(0,0) = 0$$

מצד שני, מתנאי ההתחלה השני, אם נגזור אותו לפי x:

$$u_{tx}(x,0) = g'(x)$$

$$u_{tx}(0,0) = g'(0)$$

אבל ההנחה שהנגזרות המעורבות שוות (ניזכר במשפט שאומר כי $f \in C^2$ ו - $g \in C^1$ אז $u \in C^2$), ולכן:

$$g'(0) = 0$$

לכן עבור בעיה של חצי מיתר עם תנאי שפה $u_x(0,t) = 0$, גורר שיש שני תנאי תאימות:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$$

לכן ל $-f$ ו $-g$ נעשה הרחבות זוגיות על מנת לפתור את בעיית חצי המיתר עם תנאי שפה על הנגזרת.

מכאן אפשר להמשיך כמו במקרה הקודם...

משוואת הגלים בקטע סופי עם שיטת הפרדת משתנים של פורייה

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L\,, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

יש לנו 2 תנאי התחלה וגם יש לנו 2 תנאי שפה.

תרגיל:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi\,, t > 0 \\ u(x,0) = \sin^3(x)\,, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \sin(2x)\,, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

פתרון:

לפי שיטת הפרדת משתנים, נחפש:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

נציב במד"ח:

$$u_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow 0 = u_{tt} - u_{xx} = X(x)T''(t) - X''(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \underbrace{=}_{\text{נסמן}} -\lambda$$

כעת, אחרי הפרדת המשתנים, משתמשים בתנאי השפה:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$$

לכן:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

נפתור מד"ר מסדר 2 עבור X.

$$\begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

קיבלנו את בעיית שטרום ליוביל.

<u>נחלק ל – 3 מקרים:</u>

1) כאשר $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X'(x) = c_1$$

הפתרון הכללי:

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

מתנאי השפה:

$$0 = X(0) = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$0 = X(\pi) = c_1 \cdot \pi \Rightarrow c_1 = 0$$

לכן קיבלנו $X(x) = 0$ פתרון טריוויאלי ולא מעניין.

2) כאשר $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

ניעזר בפולינום אופייני:

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\text{ממשיים}}$$

$$\boxed{X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}}$$

מתנאי השפה:

$$0 = X(0) = \boxed{c_1 + c_2 = 0}$$

$$0 = X(\pi) = \boxed{c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0}$$

לכן קיבלנו מערכת משוואות לינאריות הומוגניות:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

נבדוק דטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0$$

לכן, במקרה הזה קיבלנו מערכת משוואות לינאריות הומוגניות ולכן או שיש פתרון יחיד או שיש אינסוף פתרונות. אם הדטרמיננטה שונה מ – 0, נקבל פתרון יחיד שהוא פתרון האפס ולכן $c_1 = c_2 = 0$ ואז:

$$\boxed{X(x) = 0}$$

זה פתרון טריוויאלי לא מעניין.

3) כאשר $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

לכן:

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן, הפתרון הכללי של X הוא:

$$\boxed{X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}$$

הצבת תנאי השפה בפתרון הכללי יתנו לנו את הע"ע ואת הפ"ע:

$$0 = X(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$0 = X(\pi) = c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \Rightarrow c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

נניח ש - $c_2 \neq 0$, אחרת נקבל את הפתרון הטריוויאלי שלא מעניין.

לכן $c_2 \neq 0$ ואז:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = \pi k$$

$$\boxed{\lambda_k = k^2}, \qquad k = 1,2, \dots$$

אלו הע"ע. נמצא גם את הפ"ע:

$$\boxed{X_k(x) = C_k \sin(kx)} \neq 0$$

כעת נחזור אחורה:

$$\frac{T_k''}{T_k} = -\lambda_k$$

$$T_k'' + k^2 T_k = 0$$

לכן:

$$r^2 + k^2 = 0$$

$$r^2 = -k^2$$

$$r = \pm ik$$

לכן:

$$\boxed{T_k(t) = a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)}$$

$$\boxed{X_k(x) = C_k \sin(kx)}$$

לכן:

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = c_k \sin(kx)\,[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$
$$= \underbrace{\sin(kx)}_{x \text{ פונקציות עצמיות של }} \quad \underbrace{[A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)]}_{t \text{ פונקציות עצמיות של }}$$

נזכור כי המד"ח הומוגנית ($u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$).

לפי עיקרון סופרפוזיציה:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\,[A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)]}$$

המטרה כעת היא למצוא את A_k ואת B_k.

<u>הערה:</u> בעזר תנאי השפה מצאנו את הע"ע ואת הפ"ע, ובעזרת תנאי ההתחלה נמצא את A_k ואת B_k.

<u>הערה:</u> אם תנאי ההתחלה הם פולינומים, אז נצטרך להיעזר המקדמי פורייה לשם מציאת A_k ו - B_k. אך, אם תנאי ההתחלה הם סינוסים או קוסינוסים, אז לא נשתמש בנוסחה למקדמי פורייה, אלא מיד ניתן לעשות השוואת מקדמים.

אצלנו:

$$u(x,0) = \sin^3(x)$$

נציב $t = 0$ ומקבלים:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) = \sin^3(x)$$

נחליף את $\sin^3(x)$ בעזרת זהויות טריגונומטריות:

$$\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

נציב בחזרה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$\boxed{A_1 = \frac{3}{4}\ , A_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{A_k = 0, \qquad k \neq 1,3}$$

תנאי התחלה שני:

$$u_t(x,0) = \sin(2x)$$

נוכל לגזור את הטור כי הוא מתכנס במ"ש (חסום ע"י הטור של $\frac{1}{k^2}$) ונקבל:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\,[-A_k k \sin(kt) + B_k k \cos(kt)]$$

נציב $t = 0$:

$$u_t(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \sin(kx) = \sin(2x)$$

$$2B_1 = 1 \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{B_k = 0, \qquad k \neq 2}$$

בסה"כ קיבלנו ש:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{3}{4}\sin x \cos t + \frac{1}{2}\sin(2x)\sin(2t) - \frac{1}{4}\sin(3x)\cos(2t)}$$

ניתן להציב תנאי התחלה ולבדוק נכונות.