הכפל בשלמים מוגדר היטב (הוכחה)

כזכור, הגדרנו את המספרים השלמים כמחלקות שקילות של זוגות של מספרים טבעיים: $\mathbb{Z} = A/_\sim$ כאשר $A=\mathbb{N}^2$, $(m,n)\sim(\bar m,\bar n) \Leftrightarrow m+\bar n = \bar m + n$.

הגדרת הכפל: $[(m_1,n_1)]_\sim \cdot [(m_2,n_2)]_\sim := [(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+n_1m_2)]_\sim$

מוטיבציה להגדרה: אינטואיטיבית, מחלקת השקילות $[(m,n)]_\sim$ מייצגת את המספר השלם $m-n$. המכפלה של m_1-n_1 ו- m_2-n_2 היא

$$(m_1-n_1)\cdot(m_2-n_2) = (m_1m_2+n_1n_2)-(m_1n_2+n_1m_2)$$

ומיוצגת ע"י המחלקה $[(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+n_1m_2)]_\sim$.

טענה: הכפל מוגדר היטב, כלו': התוצאה אינה תלויה בבחירת נציגי המחלקות.

הוכחה פורמלית:

נניח: $[(m_1,n_1)]_\sim = [(\bar m_1,\bar n_1)]_\sim$, $[(m_2,n_2)]_\sim = [(\bar m_2,\bar n_2)]_\sim$

עלינו להוכיח: $[(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+n_1m_2)]_\sim = [(\bar m_1\bar m_2+\bar n_1\bar n_2,\ \bar m_1\bar n_2+\bar n_1\bar m_2)]_\sim$

לפי הנחתנו והגדרת יחס השקילות: $m_2+\bar n_2=\bar m_2+n_2$, $m_1+\bar n_1=\bar m_1+n_1$;
ועלינו להוכיח את השוויון:

$$(1)\quad (m_1m_2+n_1n_2)+(\bar m_1\bar n_2+\bar n_1\bar m_2) = (\bar m_1\bar m_2+\bar n_1\bar n_2)+(m_1n_2+n_1m_2)$$

נוכיח זאת בשני שלבים. בשלב הראשון נחליף את (m_1,n_1) ב- $(\bar m_1,\bar n_1)$, אך נשאיר את (m_2,n_2) כמות שהוא:

$$(2)\quad (m_1m_2+n_1n_2)+(\bar m_1n_2+\bar n_1m_2) = (\bar m_1m_2+\bar n_1n_2)+(m_1n_2+n_1m_2)$$

והנימוק לכך הוא: $(m_1+\bar n_1)m_2+(\bar m_1+n_1)n_2 = (\bar m_1+n_1)m_2+(m_1+\bar n_1)n_2$

(השתמשנו פעמ"ם בהנחה: $m_1+\bar n_1=\bar m_1+n_1$).

בשלב השני נשאיר את $(\bar m_1,\bar n_1)$ ונחליף את (m_2,n_2) ב- $(\bar m_2,\bar n_2)$:

$$(3)\quad (\bar m_1m_2+\bar n_1n_2)+(\bar m_1\bar n_2+\bar n_1\bar m_2) = (\bar m_1\bar m_2+\bar n_1\bar n_2)+(\bar m_1n_2+\bar n_1m_2)$$

וזאת משום ש-: $\bar m_1(m_2+\bar n_2)+\bar n_1(\bar m_2+n_2) = \bar m_1(\bar m_2+n_2)+\bar n_1(m_2+\bar n_2)$

(כאן השתמשנו פעמ"ם בהנחה: $m_2+\bar n_2=\bar m_2+n_2$).

אם נחבר $(2)+(3)$ ונצמצם מחוברים שווים בשני האגפים - נקבל את (1). $\square$