תרגיל 10 – אלגברה מופשטת 1

1. הוכיחו או הפריכו:

1.1 קיימת חבורה פשוטה G מסדר 20.
הפרכה: $20=2^2\cdot 5$ לכן הסדר של G הוא מהצורה p^2q עבור p,q ראשוניים.
עפ"י משפט מהתרגול, G אינה פשוטה.

1.2 קיימת חבורה פשוטה G מסדר 30.
הפרכה: תהי G מסדר 30. נראה כי G אינה פשוטה.
$30=2\cdot 3\cdot 5$.
לפי משפט סילו 3, מספר ת"ח 5-סילו של G n_5 מקיים $n_5=1+5k|6$.
לכן, $n_5=1$ או $n_5=6$. אם $n_5=1$ אזי P_5 חבורת ה-5-סילו, נורמלית ב G ו G אינה פשוטה. לכן, נניח $n_5=6$. 5 הוא מספר ראשוני לכן החיתוך בין שתי חבורות שונות מסדר 5 הוא טריוויאלי. לכן, חבורות ה 5-סילו תורמות, מעבר לאיבר היחידה, ארבעה איברים כל אחת. בסה"כ הן מכילות $1+6\cdot 4=25$ איברים.
לפי משפט סילו 3 , מספר ת"ח 3-סילו של G n_3 מקיים $n_3=1+3k|10$.
לכן, $n_3=1$ או $n_3=10$. אם $n_3=1$ אזי $P_3\lhd G$ כאשר P_3 חבורת 3-סילו ו G אינה פשוטה. לכן, מ"ל $n_3=1$. נניח בשלילה $n_3=10$. אזי, מכיוון ש $(3,5)=1$ אין איברים, למעט הזהות, המשותפים לחבורת 3-סילו וחבורת 5-סילו.
בנוסף מכיוון ש 3 ראשוני החיתוך של כל שתי חבורות 3 סילו הוא טרוויאלי.
לכן, מספר האיברים בחבורות 3-סילו לא כולל הזהות הוא $10\cdot 2=20$.
בסה"כ קיימים לפחות $25+20$ איברים שונים ב G
בסתירה לכך ש G מסדר 30. לכן, $n_3=1$. מש"ל.

1.3 תהי G חבורה מסדר 55 כך שיש בה יותר מארבעה איברים מסדר 5, אזי G אינה אבלית.
הוכחה: $|G|=55=5\cdot 11$ לכן חבורת 5-סילו ב G היא מסדר 5. כעת, כל איבר מסדר 5 שייך לחבורה מסדר 5. אבל חבורה מסדר 5 מכילה רק ארבעה איברים מסדר 5 (ואת איבר הזהות). לכן, מהקיום של חמישה איברים מסדר 5, נובע הקיום של יותר מחבורה אחת מסדר 5, דהיינו יותר מחבורת 5-סילו אחת. לכן, כל חבורת 5-סילו ב G אינה נורמלית.
אבל, בחבורה אבלית כל תת חבורה היא נורמלית, לכן G אינה אבלית.

2. ענו על הסעיפים הבאים:

2.1 הוכיחו כי כל חבורה מסדר 637 היא אבלית
פתרון: $637=7^2\cdot 13$. תהי G חבורה מסדר 637. לפי משפט סילו, מספר חבורות 7-סילו n_7 מקיים $n_7=1+7k|13$. לכך, $n_7=1$ ו תת החבורה 7-סילו P_7 נורמלית. באופן דומה, מספר חבורות 13-סילו n_{13} מקיים $n_{13}=1+13k|49$. לכך, $n_{13}=1$ ו תת החבורה 13-סילו P_{13} נורמלית. מכיוון

ש $|P_7|=7^2$ ו $|P_{13}|$ ראשוני, P_7 ו P_{13} אבליות.
מכיוון ש P_7 ו P_{13} תת חבורות נורמליות, $P_7P_{13} \le G$ ו $P_7, P_{13} \lhd P_7, P_{13}$. מכיוון ש $|P_7|$ ו $|P_{13}|$ זרים, $P_7 \cap P_{13} = \{e\}$ לכן (מכיוון ש $P_7 \cdot P_{13} = P_7P_{13}$) לפי משפט פיצול חבורות $P_7P_{13} \cong P_7 \times P_{13}$ חבורה אבלית כמכפלה של חבורות אבליות. אבל $P_7P_{13} \le G$ ו $|G| = 7^2 \cdot 13 = |P_7 \times P_{13}| = |P_7P_{13}|$ לכן, $P_7P_{13} = G$ ו G אבלית.

2.2 מצאו את כל החבורות מסדר 34, עד כדי איזומורפיזם.
פתרון: $34 = 2\cdot 17$. לפי משפט מהתרגול החבורות היחידות מסדר $2p$ עבור p ראשוני הן Z_{2p} ו D_p, לכן החבורות היחידות מסדר 34 הן Z_{34} ו D_{17}.

2.3 מצאו את כל החבורות מסדר 121 עד כדי איזומורפיזם (רמז: ניתן להשתמש בשאלה 5.1 מתרגיל 9)
פתרון: כל חבורה מסדר $121 = 11^2$ היא אבלית (מכיוון שסדרה הוא ריבוע של מספר ראשוני). לכן, אם אינה ציקלית, על פי סעיף 5.1 מתרגיל 9, היא איזומורפית ל $Z_{11} \times Z_{11}$. לכן החבורות היחידות, עד כדי איזומורפיזם, מסדר 121 הן Z_{121} ו $Z_{11} \times Z_{11}$.

2.4 מצאו את כל החבורות מסדר 35, עד כדי איזומורפיזם.
פתרון: $35 = 5\cdot 7$ מכיוון ש $7 \ne 1 \bmod 5$ לפי משפט מהתרגול חבורה מסדר 35 היא בהכרח ציקלית. לכן החבורה היחידה מסדר 35, עד כדי איזומורפיזם היא Z_{35}.

3. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו n_3 מספר חבורות ה 2-סילו וה 3-סילו בהתאמה.

3.1 מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שכל הערכים המדוברים אכן אפשריים).
תשובה: נשים לב $|G| = 2^2 \cdot 3$. לפי משפט סילו 3, $n_2 = 1 + 2k \mid 3$ לכן $n_2 = 1$ או $n_2 = 3$.
נראה כי שני הערכים אפשריים.
*עבור $G = Z_{12}$ $|G| = 12$ ול G יש רק חבורת 2-סילו אחת (אחרת חבורת 2-סילו לא תהיה נורמלית, בסתירה לכך שת"ח של חבורה אבלית בהכרח נורמלית).
*עבור $G = D_6$ $|G| = 12$. ל G יש יותר מחבורת 2-סילו אחת שכן כל איבר מסדר 2 שייך לחבורת 2-סילו (הוא יוצר חבורת -2 וזו בתורה מוכלת בחבורת 2-סילו). אבל כל חבורת 2-סילו ב G היא מסדר ארבע ויש יותר מארבעה איברים מסדר 2 ב G (כל ששת השיקופים הם מסדר 2). לכן, חייב להתקיים $n_2 = 3$.

3.2 מהם ערכי n_3 האפשריים? (שוב, הביאו דוגמאות).
תשובה: לפי משפט סילו 3, $n_3 = 1 + 3k \mid 4$ לכן $n_3 = 1$ או $n_3 = 4$.

נראה כי שני הערכים אפשריים.
*עבור $G=Z_{12}$ $|G|=12$ ול G יש רק חבורת 3-סילו אחת (אחרת חבורת 3-סילו לא תהיה נורמלית, בסתירה לכך שת"ח של חבורה אבלית בהכרח נורמלית).
*עבור $G=A_4$ $|G|=12$. ב G יש 8 איברים מסדר 3 (העגילים באורך 3). כל אחד מהם שייך לחבורת 3-סילו. לכן, קיימת יותר מחבורת 3-סילו אחת, (שאם לא כן ב G היו רק שני איברים מסדר 3). לכן, חייב להתקיים $n_3=4$.

3.3 האם יתכן ש $n_2=3$ ו $n_3=4$?

תשובה: לא. הוכחה: נראה כי אם $n_3=4$ אז $n_2=1$. נניח כי $n_3=4$. 3 הוא מספר ראשוני לכן החיתוך בין שתי חבורות שונות מסדר 3 הוא טריוויאלי. לכן, חבורות ה 3-סילו תורמות, מעבר לאיבר היחידה, שני איברים כל אחת. בסה"כ הן מכילות $1+4\cdot 2=9$ איברים. הסדר של כל האיברים שספרנו, למעט הזהות, הוא 3. בסה"כ נשארו $12-9=3$ איברים.כעת, קיימת לפחות חבורת 2-סילו אחת. אבל חבורת 2-סילו היא מסדר 4 וכל האיברים בה אינם מסדר 3. לכן היא חייבת להכיל את הזהות ואת שלושת האיברים שלא ספרנו. אבל, זה נכון לכל חבורת 2-סילו, לכן כל חבורות ה 2-סילו זהות, דהיינו קיימת חבורת 2-סילו יחידה.

3.4 הראו כי $n_2=n_3=1$ אם ורק אם G אבלית.

הוכחה: אם G אבלית אז כל תת חבורה שלה היא נורמלית, בפרט $n_2=n_3=1$ (חבורת p-סילו נורמלית אמ"ם $n_p=1$). בכיוון השני, אם $n_2=n_3=1$ אז חבורת 2-סילו $P_2\lhd G$ וחבורת 3-סילו $P_3\lhd G$.מכיוון ש $P_2\lhd G$ ו $P_3\lhd G$ $P_2P_3\le G$ (ואפילו ת"ח נורמלית). מתקיים $P_2,P_3\lhd P_2P_3$, $P_2\cap P_3=\{e\}$ (מכיוון ש $(|P_2|,|P_3|)=(4,3)=1$) ו $P_2\cdot P_3=P_2P_3$. לכן לפי משפט פיצול חבורות, $P_2P_3\cong P_2\times P_3$. אבל P_2 היא מסדר $2^2=4$ ולכן אבלית. בדומה P_3 אבלית (ואפילו ציקלית) מכיוון שסדרה ראשוני. לכן $P_2P_3\cong P_2\times P_3$ אבלית כמכפלה קרטזית של חבורות אבליות. לסיום נשים לב כי $P_2P_3\le G$ כך ש $|P_2P_3|=|P_2\times P_3|=4\cdot 3=12=|G|$ לכן, $P_2P_3=G$ ו G אבלית.

4. ענו על הסעיפים הבאים.

4.1 תהי G חבורה מסדר 77. זהו את כל תתי החבורות שלה, עד כדי איזומורפיזם.

פתרון: $|G|=7\cdot 11$, לכן לפי משפט לגרנז' אם $H\le G$ אזי $|H|\in\{1,7,11,77\}$. ברור כי ל G יש תת חבורה יחידה מסדר 1 - $\{e\}$ ותת חבורה יחידה מסדר 77 - G.
לפי משפט סילו קיימת ל G תת חבורה P_7 מסדר 7. בנוסף $n_7=1+7k|11$ לכן $n_7=1$. כלומר, קיימת ת"ח יחידה מסדר 7. מכיוון ש 7 ראשוני לכן $P_7\cong Z_7$. בדומה, קיימת ת"ח יחידה מסדר 11 ($n_{11}=1+11k|7$), ומכיוון ש 11 ראשוני $P_{11}\cong Z_{11}$.
בסה"כ עד כדי איזומורפיזם תתי החבורות של G הן $\{e\},Z_7,Z_{11},G$.
לחילופין, שימו לב כי $11\neq 1\bmod 7$, לכן לפי משפט מהתרגול G היא ציקלית. לכן כל תתי החבורות שלה הן ציקליות וקיימת לה תת חבורה יחידה מכל סדר המחלק את 77. בסה"כ, עד כדי איזומורפיזם תתי החבורות שלה הן Z_1,Z_7,Z_{11},Z_{77}.

4.2 תהי G חבורה מסדר 4081. הוכיחו כי G ציקלית.
הוכחה: $|G|=7\cdot 11\cdot 53$. נסמן ב n_p את מספר חבורות ה p סילו שלה.
לפי משפט סילו 3, $n_{53}=1+53k|77$ לכן, $n_{53}=1$. בדומה, $n_{11}=1+11k|371$ לכן $n_{11}=1$. $n_7=1+7k|583$ לכן $n_7=1$. מכיוון ש $n_7=n_{11}=n_{53}$ תתי החבורות המתאימות נורמליות. מכיוון שמדובר בסדרים ראשוניים הן גם ציקליות.
נסמן: $P_7=<a>,P_{11}=<b>,P_{53}=<c>$.
טענה: היוצרים של שלוש תתי החבורות הנ"ל מתחלפים ביניהם.
הוכחה: נראה את זה עבור היוצרים a,b. לגבי השאר, ניתן להוכיח באופן דומה.
מתקיים $aba^{-1}b^{-1}=(aba^{-1})b^{-1}\in P_{11}$ כי P_{11} נורמלית. בדומה, $aba^{-1}b^{-1}=a(ba^{-1}b^{-1})\in P_7$ כי P_7 נורמלית. לכן $o(aba^{-1}b^{-1})|11$ וכן $o(aba^{-1}b^{-1})|7 \Rightarrow o(aba^{-1}b^{-1})=1$. לכן $aba^{-1}b^{-1}=e$ ו $ab=ba$. מש"ל.
כעת, a,b,c הם שלושה איברים בחבורה שמתחלפים ביניהם וכן הסדרים שלהם זרים בזוגות לכן, $o(abc)=o(a)o(b)o(c)=4081$ ולכן $G=<abc>$ והחבורה היא ציקלית.
הערה: במקום הטענה, ניתן להשתמש במשפט לפיו כל מכפלה ישרה פנימית היא גם מכפלה ישרה חיצונית.

5. נתייחס לחבורה הסימטרית S_p כאשר p הוא מספר ראשוני.

5.1 כמה איברים מסדר p יש בחבורה?
תשובה: כיוון ש- p הוא ראשוני, איבר מסדר p בתוך S_p יכול להיות רק עגיל באורך p. כאלו יש $(p-1)!$.

5.2 חשבו באמצעות סעיף א' את מספר תתי החבורות מסדר p בתוך S_p.
תשובה: כיוון שכל החבורות מסדר ראשוני הן זרות עד כדי איבר היחידה, סך האיברים שהן תורמות הוא: $1+n_p(p-1)$ כאשר n_p הוא

מספר תת-החבורות מסדר p (שימו לב, זהו מספר תת חבורות ה p -סילו שכן, $|S_p|=(p-1)!p$ וכן $((p-1)!,p)=1$). כל איבר בת"ח שכזו, למעט הזהות, הוא מסדר p (שוב כיוון ש- p ראשוני) וכל איבר מסדר p שייך לתת חבורה כזו (התת חבורה שהוא יוצר היא מסדר p) לכן, אם נוסיף גם את איבר היחידה נקבל: $1+(p-1)!=1+n_p(p-1)$. לכן, $n_p=(p-2)!$.

5.3 בעזרת סעיף ב' ומשפט סילו השלישי הוכיחו כי $(p-1)!\equiv(p-1)\bmod p$.

הוכחה: לפי משפט סילו 3, $n_p\equiv 1\bmod p$ לכן $(p-2)!\equiv 1\bmod p$. נכפול את שני האגפים ב $(p-1)\bmod p$ ונקבל $(p-1)!\equiv(p-1)\bmod p$.

6. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

פתרון:

17- ראשוני ולכן כל חבורה מסדר זה היא ציקלית, ולכן אבלית.

16 – לא נכון. D_8 היא מסדר 16 אך היא לא אבלית.

15- מתקיים $5\neq 1(\bmod 3) \ \wedge\ 15=3\cdot 5$ ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.

7. תהי $N\lhd G$ ויהי $f:G\to G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת p-סילו של G, היא תת חבורת p-סילו של G/N (שימו לב שהתמונה היא PN/N).

פתרון: ניתן להניח שמתקיים $|G|=p^k r, |N|=p^s t$ כאשר $p^{s+1}\nmid|N|,\quad p^{k+1}\nmid|G|$ וכן $s\le k$ ו- $t|r$. כעת, תהי P ת"ח p-סילו של G אזי סדרה הוא p^k. מתקיים:

$\left|G/N\right|=\frac{|G|}{|N|}=p^{k-s}\frac{r}{t}$. מ"ל ש- $\left|PN/N\right|=p^{k-s}$. עפ"י משפט האיזומורפיזם השני

$\left|PN/N\right|=\left|P/P\cap N\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}$. כעת, עפ"י שאלה 4 ידוע ש- $P\cap N$ היא תת חבורת p-סילו של N ולכן $|P\cap N|=p^s$ שכן $|N|=p^s t$. לכן,

$\left|PN/N\right|=\left|P/P\cap N\right|=\frac{|P|}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{|P\cap N|}=\frac{p^k}{p^s}=p^{k-s}$ כדרוש.

8. ענו על הסעיפים הבאים:

8.1 תהא G חבורה עם: 52 או 175 איברים. הוכיחו ש- G לא פשוטה.

פתרון: אלה הן חבורות מסדר p^2q והראינו בכיתה שחבורות אלה אינן פשוטות.

8.2. הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.

פתרון: $125=5^3$ ולכן זוהי חבורת p ולכן המרכז שלה אינו טריוויאלי. אבל המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית והחבורה אינה פשוטה.

8.3. תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש- G ציקלית.

פתרון:

לגבי 9797**:**
$9797=97\cdot 101$ ולכן אם G חבורה מסדר 9797 אז על-פי המשפט על חבורות מסדר pq , G ציקלית.
נוכיח זאת (שוב) ישירות. מתקיים:

$$n_{97}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,97\right)\ \wedge n_{97}\,|\,101\ \rightarrow n_{97}=1\rightarrow A=P_{97}\lhd G$$

$$n_{101}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,101\right)\ \wedge n_{101}\,|\,97\ \rightarrow n_{101}=1\rightarrow B=P_{101}\lhd G$$

נסמן $H=AB$, אזי H היא מכפלה ישרה פנימית של A ו- B (מדוע?) ולכן מתקיים $|H|=|A|\cdot|B|=9797$ ולכן $H=G$. מכאן G היא מכפלה ישרה פנימית של A,B ולכן (לפי משפט מהרצאה) גם מכפלה ישרה חיצונית שלהן. מתקיים $G\cong A\times B\cong \mathbb{Z}_{97}\times\mathbb{Z}_{101}\cong\mathbb{Z}_{9797}$.

לגבי 1645**:**

$1645=5\cdot 7\cdot 47$. ניתן לראות ש– $n_{47}=n_7=n_5=1$. שלוש תת החבורות הללו הן ציקליות ונורמליות. נסמן: $H_{47}=\langle c\rangle$, $H_7=\langle b\rangle$, $H_5=\langle a\rangle$.
<u>טענה</u>: היוצרים של שלוש תת החבורות הנ"ל מתחלפים בינהם.
<u>הוכחת הטענה</u>: נראה זאת עבור שני יוצרים (והשאר באותו אופן). מתקיים: $aba^{-1}b^{-1}=\left(aba^{-1}\right)b^{-1}\in H_7$ כי H_7 נורמלית. $aba^{-1}b^{-1}=a\left(ba^{-1}b^{-1}\right)\in H_5$ כי H_5 נורמלית. לכן, משיקולי סדרי החבורות, נקבל $aba^{-1}b^{-1}=1$, כלומר $ab=ba$.
מש"ל טענה.
כעת, יש לנו שלושה איברים בחבורה שמתחלפים בינהם וכן הסדרים שלהם זרים, אזי לפי טענה שהוכחנו בעבר מתקיים:
$o\left(a\cdot b\cdot c\right)=lcm\left(o\left(a\right),o\left(b\right),o\left(c\right)\right)=1645$ ולכן $\langle a\cdot b\cdot c\rangle=G$ והחבורה היא ציקלית.
הערה: במקום הטענה, ניתן להשתמש במשפט לפיו כל מכפלה ישרה פנימית היא גם מכפלה ישרה חיצונית.

בהצלחה! ☺