פתרון תרגיל בית 9

<u>שאלה 1</u>

א. טענת עזר: $C\subseteq D \Leftarrow cl(C)\subseteq cl(D)$.

הוכחת טענת עזר: $C\subseteq D$ לכן מכיון ש $D\subseteq cl(D)$ נקבל ש $C\subseteq cl(D)$. כעת, $cl(D)$ סגורה המכילה את C ומכיון ש $cl(C)$ הסגורה **המינימלית** המכילה את C נקבל ש $cl(C)\subseteq cl(D)$. מש"ל טענת עזר.

$A\cap B\subseteq A$ לכן עפ"י טענת העזר נקבל ש $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)$ ובאופן דומה מקבלים ש- $cl(A\cap B)\subseteq cl(B)$ ולכן בסה"כ $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב.נתבונן במרחב המטרי $\mathbb{R}$ ויהיו $\begin{matrix} A=(0,1) \\ B=(1,2) \end{matrix}$ אזי $A\cap B=\varnothing \Leftarrow cl(A\cap B)=\varnothing$

$\begin{matrix} cl(A)=[0,1] \\ cl(B)=[1,2] \end{matrix}$ ולכן $cl(A)\cap cl(B)=\{1\}$ ומתקיים

$$\{1\}=cl(A)\cap cl(B)\not\subset cl(A\cap B)=\varnothing$$

ג. הטענה: $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$

הוכחה: $A\subseteq A\cup B$ וגם $\operatorname{int}(A)\subseteq A$ (לפי ההגדרה של הפנים) ולכן $\operatorname{int}(A)\subseteq A\cup B$.

אך $\operatorname{int}(A)$ זו קבוצה פתוחה שמוכלת ב- $A\cup B$ ולכן $\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$. באותו אופן מראים ש- $\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$ וזה מסיים את ההוכחה.

<u>שאלה 2</u>

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}\setminus\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$. לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נניח $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$ אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו- y גם ב- $\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש $n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר x ו- y) שעובר דרך x. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ x ונסמנה z. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו- z

a) לא נמצאת על ישר זה). כמו כן , a לא נמצאת על הישר המחבר בין z ו- y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין y ל- z. אם יש מסילה ב $\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין x ל y וכן מסילה בין y ל z אז יש גם מסילה בין x ל- z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאו' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ היה הומיאו'. אבל כפי שתיארנו המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

<u>שאלה3</u>

$f:X\to Y$ הומיאו' ובפרט פונקציה פתוחה ולכן $f(\text{int}(A))$ פתוחה. כמו כן $\text{int}(A)\subseteq A$ ולכן $f\left(\text{int}(A)\right)\subseteq f\left(A\right)$. בסה"כ נקבל ש $f(\text{int}(A))$ פתוחה המוכלת ב $f\left(A\right)$ ולכן $f\left(\text{int}(A)\right)\subseteq \text{int}\left(f\left(A\right)\right)$. נוכיח את ההכלה ההפוכה ונקבל שוויון.

באופן דומה מכיון ש f הומיאו' אז f^{-1} פתוחה ומכאן $f^{-1}\left(\text{int}(B)\right)\subseteq \text{int}\left(f^{-1}\left(B\right)\right)$ לכל $B\subseteq Y$. נציב $B=f(A)$ ונקבל $f^{-1}\left(\text{int}(f(A))\right)\subseteq \text{int}\left(A\right)$. נפעיל f על שני האגפים ונקבל ש

$\text{int}(f(A))\subseteq f\left(\text{int}\left(A\right)\right)$. בסה"כ $f\left(\text{int}(A)\right)=\text{int}\left(f\left(A\right)\right)$

<u>שאלה4</u>

א. לא קיים המיאו' שכן העוצמות של המרחבים שונות.

ב. לא קיים הומיאו' בין X ו- S^1, כאשר $X=$ תת-מרחב של R^2 בצורת 8 , $S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ שכן, הוצאת הנקודה האמצעית ב8 המחברת בין שני המעגלים תיצור שני מרכיבי קשירות והמרחב יהיה <u>לא קשיר</u> בעוד שהוצאת כל נקודה מ S^1 תיצור מרחב הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$ שהוא <u>קשיר</u> (הוא קמור וקשיר מסילתית) פורמאלית , נניח בשלילה שיש הומיאומורפיזם $f:S^1\to X$. אזי בפרט f על ולכן אם נסמן ב a את הנקודה האמצעית ב8 המחברת בין שני המעגלים נקבל שקיים $b\in S^1$ כך ש $f(b)=a$. אם $f:S^1\to X$ הומיאו' אז גם $f|_{S^1\setminus\{b\}}:S^1\setminus\{b\}\to X\setminus\{a\}$ הומיאומורפיזם. אך זה לא אפשרי שכן כפי שציינו לעיל, התחום קשיר בעוד שהטווח אינו קשיר והומיאומורפיזם שומר על קשירות.

ג. המרחבים אינם הומיאומורפיים שכן הומאימורפיזם מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות (הוכחנו זאת בתרגול) . בשני המרחבים שני מרכיבי קשירות. לו היה קיים הומיאו' אז התמונה של מרכיב הקשירות $\{0\}$ היתה $(2,5)$ או $(7,8)$ (אלה מרכיבי הקשירות של המרחב השני). אבל זה כמובן בלתי אפשרי וסותר את החד-ערכיות של הפונקציה.

<u>שאלה 5</u>

א. אם X,Y הומיאומורפיים אז בפרט קיימת פונקציה $f:X\to Y$ חח"ע ועל ולכן $|X|=|Y|$ ההיפך: נניח ש $|X|=|Y|$ אזי קיימת פונקציה $f:X\to Y$ חח"ע ועל. אם X,Y מצויידים בטופולוגיות הדיסקרטיות אז ברור שכל פונקציה $g:X\to Y$, ובפרט הפונקציה f הנ"ל רציפה ופתוחה (למה?), לכן אם $|X|=|Y|$ אז המרחבים הומיאומורפיים (שכן f רציפה הפיכה ופתוחה).

ב. נראה ש $\mathbb{N}$ דיסקרטי. אמנם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\{n\}=B(n,1)$ (אפשר לקחת כל רדיוס $1\geq$)

לכן כל נקודון פתוח והמרחב דיסקרטי. $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ אינו דיסקרטי כי למשל

$\{0\}$ לא פתוח כי כל כדור מסביב ל 0 כולל נקודות מ $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$.

ג. $(A,\tau_A),(B,\tau_B)$ אינם הומיאומורפיים כתוצאה מיידית מסעיפים קודמים.

ד. ברור שהעוצמה של שתי הקבוצות היא $\aleph_0$. כמו כן הוכחנו בסעיף ב' ש $\mathbb{N}$ דיסקרטי. לכן

מ"ל ש $A=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ דיסקרטי כדי להסיק עפ"י א' שהמרחבים הומיאומורפיים.

נוכיח שכל נקודון מהצורה $\left\{\frac{n_0}{n_0+1}\right\}$ פתוח . יהי

$\varepsilon=\min\left\{\frac{n_0}{n_0+1}-\frac{n_0-1}{n_0},\frac{n_0+1}{n_0+2}-\frac{n_0}{n_0+1}\right\}$ ניתן לראות ש $\varepsilon>0$ וכן ש

$B_A\left(\frac{n_0}{n_0+1},\varepsilon\right)=\left\{\frac{n_0}{n_0+1}\right\}$.

<u>שאלה 6</u>

הפרכה ע"י דוגמא נגדית: נתבונן ב - $\mathbb{R}^2$ ונבחר שתי קבוצות:

$A=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$, $B=\{(x,y):(x-2)^2+y^2\le 1\}$. אלה שני עיגולים עם רדיוס אחד אשר משיקים בנקודה $(1,0)$. כדור פתוח במרחב נורמי הוא קמור ולכן קשיר מסילתית וקשיר, מכאן A,B תתי מרחבים קשירים , ומכיוון שחיתוכם אינו ריק $A\cup B$ הוא גם תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}^2$.

מצד שני $int(A\cup B)$ הוא איחוד של שני עיגולים (ללא השפה) זרים. מכאן שהפנים אינו קשיר (מדוע?).

<u>בונוס</u>

תהיינה $x,y\in\mathbb{R}^2\setminus A$ נראה שיש מסילה ביניהן. ברור שאם $x=y$ קיימת מסילה (ניתן לקחת מסילה קבועה). נניח כעת $x\ne y$. נסתכל על קבוצת כל הישרים B_x שעוברים דרך x ודרך נקודה השייכת ל A . מהנתון $|A|\le\aleph_0$. מכיון שישר נקבע עפ"י שתי נקודות בצורה יחידה נקבל ש $|B_x|\le\aleph_0$.

מכיון שעוצמת כל הישרים העוברים דרך x היא $\aleph$ (נובע מהעוצמה של קבוצת השיפועים האפשריים) נקבל שבהכרח קיים ישר שעובר דרך x וגם אין עליו אף נקודה מ A. נסמן ישר כזה ב l_x. מסיבות דומות קיים ישר l_y שעובר דרך y , אין עליו אף נקודה מ A ובנוסף הוא אינו מקביל (או מתלכד) עם l_x (שימו לב שיש רק ישר אחד שעובר דרך y ומקביל, או מתלכד עם l_x). לכן l_x ו l_y נחתכים בנקודה שנסמנה z.

הפונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2\setminus A$ המעתיקה את $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ על הקטע המחבר את x ל z $\left(f(0)=x, f\left(\frac{1}{2}\right)=z\right)$ ואת הקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ על הקטע המחבר את z ל y $\left(f(1)=y, f\left(\frac{1}{2}\right)=z\right)$, היא המסילה הדרושה ב $\mathbb{R}^2\setminus A$. למעשה מדובר כאן על שרשור שתי מסילות סטנדרטיות. הבעיה היתה להראות ששתי המסילות הסטנדרטיות האלו הן ב $\mathbb{R}^2\setminus A$ ואת זה הוכחנו לעיל משיקולי עוצמות.