<u>תרגול 4 – אדם צ'פמן</u>

שאלה:

בתוך כובע נמצאים פתקים עם המספרים מ1 עד 20 – כל אחד בדיוק פעם אחת. מוציאים פתקים באקראי עד להוצאת המספר 13. משתנה X מייצג את כמות ההוצאות. מה ההתפלגות של X?

תשובה:

הסיכוי ש13 יצא בפעם הראשונה הינו $\frac{1}{20}$. הסיכוי שיצא בפעם השנייה הינו $\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{20}$. בפעם השלישית $\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{20}$. לפי החוקיות הזאת, ניתן לשים לב שהסיכוי שיצא בפעם הi הוא $\frac{1}{20}$ לכל $1\le i\le 20$. אפשר לראות זאת בדרך הבאה שמסבירה מדוע ההתפלגות היא אחידה – מסדרים את המספרים מ1 עד 20 באיזשהו סדר אקראי, והמקום של 13 הוא ה משתנה X. עכשיו ברור של13 יש סיכוי שווה להופיע בכל אחד מהמקומות ברשימה. באותה מידה, כל סידור כזה מייצג אפשרות שווה לסדר הוצאות הפתקים, ולכן X מתלכד עם הוצאת המספר 13.

שאלה:

נתון משתנה מקרי X שמקבל כל מספר שלם אי-שלילי i בהסתברות $P(X=i)=\frac{C}{3^i}$.

א. מצא את C.
ב. מצא את התוחלת של X.
ג. מצא את ההסתברות $P(X>5)$.
ד. מצא את ההסתברות שX אי-זוגי.

תשובה:

נזכור כי

$$1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}$$

במקרה שלנו $q=\frac{1}{3}$. לכן

$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=C\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\right)=C\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3C}{2}=1$$

משמע $C=\frac{2}{3}$.

אם גוזרים את הנוסחה למעלה לפי q מקבלים

$$1+2q+3q^2+\cdots=\frac{1}{(1-q)^2}$$

ואז מכפילים בq

$$q+2q^2+3q^3+\cdots=\frac{q}{(1-q)^2}$$

ואז

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot P(X=i)=\frac{2}{3}\left(0+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

הסיכוי שיצא מספר גדול מ5 הוא

$$P(X>5)=\sum_{i=6}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^8}+\cdots\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^6}$$

שימו-לב, בשאלות רבות היה יותר הגיוני לחשב את הסיכוי שיצא מספר בין 0 ל5 ואז לקחת את המשלים ל1, אולם במקרה הזה הנוסחה לסכום האינסופי יותר פשוטה מהנוסחה לתת-סכום סופי, ולכן מומלץ לחשב ישירות.

הסיכוי שיצא אי-זוגי הוא

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{243}+\cdots\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{4}$$

שאלה:

בכד נמצאים 4 כדורים שחורים, 3 לבנים ו2 אדומים. מוציאים מהכד ארבעה כדורים. נסמן בX את מספר הצבעים השונים שיצאו. מהי ההתפלגות של X? מהי התוחלת? מהי השונות?

תשובה:

הערכים האפשריים הם 1, 2 ו3. מרחב המדגם של בחירת 4 כדורים הוא בגודל $\binom{9}{4}$. ישנה רק אפשרות אחת מתוך מרחב המדגם שנותנת צבע אחד והיא בחירת ארבעת הכדורים השחורים, ולכן $P(X=1)=\frac{1}{\binom{9}{4}}$. ישנן יותר קומבינציות שנותנות שני צבעים – שני שחורים ושני לבנים, שני שחורים ושני אדומים, שני אדומים ושני לבנים, שלושה שחורים ולבן אחד, שלושה שחורים ואדום אחד, שלושה לבנים ושחור אחד, שלושה לבנים ואדום אחד. אם נסכם זאת, סך האופציות הוא

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}+\binom{4}{3}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{2}{1}+\binom{3}{3}\binom{1}{1}=18+6+3+12+8+1=48$$

אז הסיכוי שיהיו שני צבעים הוא

$$P(X=2)=\frac{48}{\binom{9}{4}}=\frac{48}{126}=\frac{8}{21}$$

ואז הסיכוי הנותר הוא הסיכוי לשלושה צבעים

$$P(X=3)=1-\frac{8}{21}-\frac{1}{126}=\frac{11}{18}$$

התוחלת אם כן היא

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{126}+2\cdot\frac{8}{21}+3\cdot\frac{11}{18}=\frac{164}{63}$$

השונות היא

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=1\cdot\frac{1}{126}+4\cdot\frac{8}{21}+9\cdot\frac{11}{18}-\left(\frac{164}{63}\right)^2\approx 0.255$$

שאלה:

ישנם ארבעה אוטובוסים שמסיעים 148 תלמידים. מספרי התלמידים באוטובוסים השונים הם 40, 33 ,25 ו50. בוחרים תלמיד באקראי מתוך 148 התלמידים, ובוחרים נהג באקראי מתוך 4 נהגי האוטובוסים. נסמן בX את מספר התלמידים הנוסעים באוטובוס של התלמיד הנבחר ובY את מספר התלמידים באוטובוס של הנהג הנבחר. איזו תוחלת גבוהה יותר, של X או של Y? חשבו את התוחלות.

תשובה:

הסיכוי שיבחר תלמיד מהאוטובוס עם יותר תלמידים גבוה יותר מאשר שיבחר תלמיד מאוטובוס עם פחות תלמידים, מה שנותן משקל גבוה יותר למספרים הגבוהים, ולכן אנו מצפים שהתוחלת של X תהיה גבוה משל Y.

באופן מדויק יותר:

$$E(X)=40\cdot\frac{40}{148}+33\cdot\frac{33}{148}+25\cdot\frac{25}{148}+50\cdot\frac{50}{148}=\frac{5814}{148}\approx 39.28$$

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{40+33+25+50}{4}=37$$

אז עכשיו זה חד משמעי שהתוחלת של X אכן גדולה מהתוחלת של Y.

שאלה:

שני זוגות נפגשים לארוחת ערב. הם מתיישבים באקראי בשולחן סטנדרטי עם ארבעה מושבים – שניים מכל צד.

נסמן בX את מספר הזוגות היושבים זה מול זה. מה התוחלת של X? מה השונות?

תשובה:

נשים לב שX יכול לקבל את הערכים 0 או 2, ולא את 1. מספר האפשרויות לסדר ארבעה אנשים בארבעה מושבים הוא $4! = 24$. מספר האפשרויות לסדר את הזוגות כך שזוג יושב מול זוג הוא 8. לכן $P(X=2)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ ו$P(X=0)=2/3$. אי-לכך, התוחלת היא $E(X)=0\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ והשונות היא

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$$

שאלה:

שני מטבעות מוטלים. אחד נותן פלי בהסתברות 0.6 והשני בהסתברות 0.7. הניחו כי תוצאות ההטלה הן בלתי-תלויות. נסמן בX את מספר הפעמים שהוטל פלי. חשבו את $P(X=1)$ ואת התוחלת של X.

תשובה:

הסיכוי שיצא פלי פעמיים הוא $P(X=2)=0.6\cdot 0.7=0.42$. הסיכוי שלא יצא אפילו פעם אחת הוא $P(X=0)=0.4\cdot 0.3=0.12$. לכן הסיכוי שיצא בדיוק פעם אחת הוא $P(X=1)=1-0.42-0.12=0.46$.
אי-לכך

$$E(X)=0\cdot 0.12+1\cdot 0.46+2\cdot 0.42=1.3$$