תרגיל 4

1. תהי $A=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עבור $p\notin\mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau=P(\mathbb{R})\cup\{B\subseteq A:|B^c|\leq\aleph_0\}$.
הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה. הראו שהיא האוסדורפית ושכל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.
פתרון:

נבדוק את 3 האקסיומות:

1. $\emptyset\in P(\mathbb{R})$ ולכן $\emptyset\in\tau$. בנוסף, $|A^c|\leq\aleph_0$ ולכן $A\in\tau$.

2. איחודים כלשהם: יהיו $O_i\in\tau$. אם כולן תת קבוצות של $\mathbb{R}$, אז כך גם האיחוד, ולכן הוא שייך לτ. אחרת, יש i כך ש$|O_i^c|\leq\aleph_0$. אז מתקיים: $(\bigcup O_i)^c\subseteq O_i^c$, ולכן הוא בן מניה. מכאן ש$\bigcup O_i\in\tau$.

3. חיתוכים סופיים: יהיו $O_1,O_2\in\tau$. אם אחד מהם מוכל ב-$\mathbb{R}$, אז כך גם החיתוך. אחרת, לשניהם יש משלים בן מניה, ואז

$$|(O_1\cap O_2)^c|=|O_1^c\cup O_2^c|\leq|O_1^c|+|O_2^c|\leq\aleph_0$$

כעת נראה שהטופולוגיה הזאת האוסדורפית. יהיו $x\neq y\in A$, צריך למצוא $U,V\in\tau$ כך ש-$x\in U,y\in V$ וגם $U\cap V=\emptyset$. נחלק לשני מקרים:

(א) $x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}$: במקרה זה אפשר לבחור $U=\{x\},V=\{y\}$

(ב) $x\in\mathbb{R},y=p$: במקרה זה אפשר לבחור $U=\{x\},V=A\setminus\{x\}$.

לבסוף, נראה שכל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף. נניח ש-$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ ונניח ש-$\lim_{n\in\mathbb{N}}x_n=x\in A$.
גם כאן נחלק לשני מקרים:

(א) $x\in\mathbb{R}$ - במקרה כזה $\{x\}$ היא סביבה של x ולכן כמעט כל האיברים בסדרה נמצאים בה. במילים אחרות, הסדרה קבועה לבסוף.

(ב) $x=p$ - במקרה כזה $A\setminus\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{x\}$ היא סביבה של x. לכן, כמעט כל האיברים בסדרה נמצאים בה. זה הגיוני רק אם כמעט כל האיברים בסדרה הם x, או במילים אחרות, היא קבועה לבסוף.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A\neq\emptyset,X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

פתרון. בטופולוגיה הקו-סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגוחה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X=A\cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

פתרון. לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ כאשר $a\in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות.
ניקח $X=\mathbb{N}$. נסמן $A_n=\{m\in\mathbb{N}\mid m\leq n\}$. כלומר $A_n=\mathbb{N}\cap(0,n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau=\{A_n\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

3. נציג את ההוכחה של פרופ' הילל פורסטנברג מהאוניברסיטה העברית לכך שיש אינסוף ראשוניים. הוא גילה אותה בעודו סטודנט לתואר ראשון והיא התפרסמה בירחון של האגודה המתמטית של ארצות הברית! (יש לאן לשאוף).
עבור $a\in\mathbb{Z}$ ו-$d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ נגדיר את $S_{a,d}$ להיות הסדרה החשבונית

$$S_{a,d}:=\{a+dn\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

נגדיר טופולוגיה על השלמים על ידי:

$$\tau_f:=\{O\subseteq\mathbb{Z}\mid\forall n\in O\;\exists\, d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}:S_{n,d}\subseteq O\}$$

(במובן לא בדיוק פורמלי, $S_{a,d}$ הוא סוג של כדור ב"רדיוס" d סביב a).

(א) הראו ש-$(\mathbb{Z},\tau_f)$ הוא אכן מרחב טופולוגי.
<u>פתרון:</u>
ראשית, ברור ש-$\emptyset,\mathbb{Z}\in\tau_f$. נראה כעת ש-$\tau_f$ סגורה לאיחוד כלשהו. יהיו $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subseteq\tau_f$ ונסמן $O:=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$. כעת, יהי $n\in O$. בהכרח קיים $\lambda_0\in\Lambda$ כך ש-$n\in O_{\lambda_0}$. מכיוון ש-$O_{\lambda_0}\in\tau_f$ קיים $d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך ש-$S_{n,d}\subseteq O_{\lambda_0}$. לכן

$$S_{n,d}\subseteq O_{\lambda_0}\subseteq O$$

מה שמוכיח ש-O פתוחה ב-τ_f. לבסוף, נראה סגירות לחיתוך. נניח ש-$O_1,O_2\in\tau_f$ ויהי $n\in O:=O_1\cap O_2$. קיימים $d_1,d_2\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך ש-

$$S_{n,d_1}\subseteq O_1,S_{n,d_2}\subseteq O_2$$

נגדיר $d:=d_1\cdot d_2$. כעת קל לראות ש-

$$S_{n,d}\subseteq S_{n,d_1}\cap S_{n,d_2}\subseteq O_1\cap O_2=O$$

כרצוי.

(ב) הראו שהקבוצה $S_{a,d}$ תמיד סגוחה (סגורה וגם פתוחה)
<u>פתרון:</u>
ראשית ברור ש-$S_{a,d}$ פתוחה. בנוסף, קל לראות ש-

$$S^c_{a,d}=\bigcup_{1\leq a\neq b\leq d}S_{b,d}$$

שהוא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח. מכאן, $S_{a,d}$ גם קבוצה סגורה.

(ג) נסמן $A := \bigcup_p S_{0,p}$ כאשר p רץ על כל הראשוניים. הראו כי $A^c = \{-1,1\}$.

פתרון:

לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה, לכל איבר $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,1\}$ קיים פירוק יחיד למספרים ראשוניים. בפרט, הוא מוכל ב-$S_{0,p} = p\mathbb{Z}$ כלשהו. לכן ברור ש-$A^c \subseteq \{-1,1\}$. מנגד, אף מספר ראשוני לא מחלק את $1, -1$ ולכן $A^c \supseteq \{-1,1\}$.

(ד) הסיקו שקיימים אינסוף ראשוניים.

פתרון:

אם היה רק מספר סופי של ראשוניים, A הייתה קבוצה סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות ולכן $A^c = \{-1,1\}$ הייתה קבוצה פתוחה. זה כמובן לא מתאפשר לפי ההגדרה (כי היא סופית ולכן לא מכילה אף סדרה חשבונית).

4. בונוס: נסתכל על וריאציה של ההוכחה של פורסטנברג שהוצגה על ידי סולומון גולומב כמה שנים לאחר מכן.

(א) לפני שמתחילים

i. נסמן את המכנה המשותף הגדול ביותר של $a, b \in \mathbb{Z}$ על ידי (a,b).

ii. לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ קיימים $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש-$ax + by = (a,b)$ (תוצאה של האלגוריתם האוקלידי).

iii. משפט דיריכלה אומר (בין היתר) שאם $(a,b) = 1$ אז ב-$S_{a,b}$ קיימים אינסוף ראשוניים.

(ב) נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\tau_g := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall n \in O \, \exists \, d \in \mathbb{Z}^* : (n,d) = 1 \land S_{n,d} \subseteq O\}$$

הראו שזו אכן טופולוגיה.

פתרון:

בדיוק כמו בהוכחה של פורסטנברג, יחד עם העבודה שאם d_1, d_2 זרים ל-n, אז גם $d_1 \cdot d_2$ זר לו.

(ג) האם τ_g חזקה או חלשה מ-τ_f.

פתרון:

די ברור מהגדרת הטופולוגיה ש-$\tau_g \subseteq \tau_f$. מכאן ש-τ_g חלשה מ-τ_f.

(ד) השתמשו בטופולוגיה זו כדי להוכיח שישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

פתרון:

כמו בהוכחה של פורסטנברג, קל לראות ש-$S_{0,p}$ קבוצה סגורה עבור p ראשוני (כי המשלים בבירור פתוח). מכאן הטיעון ממשיך באותה צורה.

(ה) הראו ש-τ_g היא האוסדורף (T_2) אבל לא T_3

הערה: אנחנו נגיד שמרחב טופולוגי (X, τ) מקיים את T_3 אם לכל $x \in X$ וכל קבוצה סגורה $A \subseteq X$ כך ש-$x \notin A$ קיימות $U, V \in \tau$ כך ש-$x \in U, A \subseteq V$ ו-$U \cap V = \emptyset$.

פתרון:

ראשית נראה שהיא באמת האוסדרוף. יהיו $a, b \in \mathbb{Z}^*$. נגדיר $d = a \cdot b + 1$. קל לראות ש-$(a,d) = (b,d) = 1$. בנוסף $|a-b| \leq d$ ולכן $a \notin S_{b,d}$ וגם $b \notin S_{a,d}$. מכיוון שאלה סדרות חשבוניות עם אותו מקדם, $S_{a,d} = S_{b,d}$ או $S_{a,d} \cap S_{b,d} = \emptyset$. בבירור מדובר במקרה השני, כרצוי.

כדי לראות שהטופולוגיה אינה T_3, נגדיר $A := 2\mathbb{Z}^*$ ו-$n := 1$. ראינו קודם ש-A סגורה ולכן זו דוגמה קבילה. נניח ש-$U, V \in \tau_g$ כך ש-$n \in U, A \subseteq V$ ו-$U \cap V = \emptyset$. לפי הגדרה, קיים $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ כך ש-$S_{1,d} \subseteq U \subseteq A^c$. אם $d \notin 2\mathbb{Z}^*$ אז

$$1 + d \in S_{1,d} \cap A$$

וזה לא אפשרי, לכן $d \in 2\mathbb{Z}^*$. נסתכל על $\overline{d} := \min\left\{ \frac{d}{2^n} \in \mathbb{Z}^* \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, כלומר המספר האי זוגי המקסימלי שמחלק את d. ברור ש-$a := \overline{d} + 1 \in A$ ולכן קיים $r \in \mathbb{Z}^*$ כך ש-$S_{a,r} \subseteq V \subseteq S_{1,d}^c$. נשים לב שאם $(d, r) = 1$ אז קיימים $x, y \in \mathbb{Z}^*$ כך ש-

$$dx + ry = 1 \Rightarrow ry = 1 - dx \Rightarrow ry(d - \overline{d}) = d - \overline{d} - (d - \overline{d})dx \Rightarrow$$

$$a + ry(d - \overline{d}) = \overline{d} + 1 + d - \overline{d} - (d - \overline{d})dx = 1 + (1 - d + \overline{d})xd \in S_{1,d}$$

כלומר $a + ry(d - \overline{d}) \in S_{1,d} \cap S_{a,r}$, שעומד בניגוד להנחות שלנו. מכאן של-r ול-d יש גורם משותף. אם $(\overline{d}, r) \neq 1$ אז קל לראות ש-$1 \in S_{a,r}$ מה שגם לא אפשרי. האפשרות היחידה שנשארה היא ש-$(r, 2^n) \neq 1$, או במילים אחרות r זוגי. אך זה גם לא אפשרי כי גם אז $S_{a,r} \notin \tau_g$.

(ו) נסחו את משפט דריכלה באמצעות הטופולוגיה הזו והראו שהניסוח שלכם שקול.

פתרון:

לכל קבוצת הראשוניים $P \subseteq \mathbb{Z}^*$ היא צפופה ב-τ_g (כלומר הסגור שלה הוא $\mathbb{Z}^*$).

נראה שזה אכן שקול. ראשית נניח שמשפט דריכלה בצורתו הנתונה נכון, ונראה את הטענה שלנו. יהי $a \in \mathbb{Z}^*$, צריך למצוא $b \in \mathbb{Z}^*$ כך ש-$(a, b) = 1$ וגם $S_{a,b} \cap P \neq \emptyset$. אבל לפי משפט דריכלה כל איבר b שזר ל-a מתאים.

מנגד, נניח שהטענה שלנו נכונה ויהי $a, b \in \mathbb{Z}^*$ כך ש-$(a, b) = 1$. קל לראות ש-$S_{a,b}$ פתוחה ב-τ_g. קל להראות שאם קבוצה צפופה במרחב טופולוגי, היא צפופה גם בכל תת קבוצה פתוחה שלו. לכן, $P \cap S_{a,b}$ צפופה ב-$S_{a,b}$. ראינו כבר ש-τ_g מקיימת את T_2 ובפרט את T_1 ולכן כל הנקודונים שלה סגורים. בפרט, אם $P \cap S_{a,b}$ הייתה סופית, היא הייתה סגורה ולכן לא צפופה. הסתירה מוכיחה את הטענה שלנו.

(ז) הערה: גולומב הראה אפילו שהטופולוגיה הזו קשירה! (תלמדו את המושג הזה בקרוב). לא טריוויאלי למצוא טופולוגיה האוסדורפית קשירה על הטבעיים.