תרגול 1

1. נתון מרחב מטרי (X,d). הוכיחו שלכל $x, \text{y} \in X$ ו־ $A \subseteq X$ מתקיים

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$$

2. הוכיחו שאיחוד של כמות סופית של קבוצות חסומות הוא חסום.

3. גלגול של קבוצת קנטור: נסמן ב־X את אוסף כל הסדרות האינסופיות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,\ldots,n-1\}$. עבור $w=\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}, u=\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ נגדיר

$$\kappa(w,u) := \begin{cases} \min_{i\in\mathbb{N}}\{i\in\mathbb{N} \mid w_i \neq u_i\} & w\neq u \\ \infty & w=u \end{cases}$$

ונגדיר את הפו' הבאה $d : X\times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$.d(w,u) = \begin{cases} 0 & x=y \\ p^{-\kappa(w,u)} & x\neq y \end{cases}$$

עבור $\text{p} \geq 1$ כלשהו.

(א) הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
הערה: כאשר $n=2$, כלומר הסדרות מקבלות ערכים בינארים, אז X נקרא מרחב קנטור ויסומן כ־C. נתמקד רק בו מעכשיו. לצורכי התרגיל הבא, נסמן גם C_n עבור $n\neq 2$.

(ב) חשבו את המרחק בין הסדרה $x_i := i \ (mod\ 2)$ והסדרה $y_i := 0$

(ג) נגדיר את הקבוצה

$$A := \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in C \mid \limsup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i} x_i > 0\}$$

חשב את המרחק של הקבוצה הזו מ־$\{y_i\}$ שהוגדרה קודם לכן.

(ד) אתגר: הוכיחו שאף נקודה במרחב קנטור אינה מבודדת. רמז: אפשר להעזר במשפט מההרצאה.

4. הגדרנו בכיתה את המטריקה ה־p ־ אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$ ו־

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$$

הוכיחו שזו אכן אולטרה־מטריקה. עשו זאת ישירות וגם באמצעות התרגיל הקודם.

5. מצאו את הכדורים הבאים

(א) כדור פתוח בקוטר $\frac{\pi}{2}$ על ספרה ברדיוס 1

(ב) $B(0,1)$ על $\mathbb{R}$ עם מטריקת d_1 וגם עם d_∞

(ג) $B_{d_3}(0, \dfrac{2}{5})$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_3)$

(ד) אתגר: סווגו את כל הכדורים במרחב ה־p־אדי.

6. למרחב מטרי, הוכיחו או הפריכו את הדברים הבאים:

(א) $r_1 > r_2 \Rightarrow B(x,r_1) \supseteq B(x,r_2)$

(ב) $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x,r_1) \supseteq B(x,r_2)$

(ג) $r_1 > r_2 \Leftarrow B(x,r_1) \supseteq B(y,r_2)$

7. הוכיחו שבאולטרמטריקה, כל נקודה בתוך כדור היא המרכז שלו

8. על כל אחת מהסדרות הבאות קבעו אם היא מתכנסת ולאן במטריקה ה־p־אדית

(א) p^n

(ב) a^n

(ג) $n!$

(ד) $\sum_{i=0}^{n} p^i$

9. מצאו סדרה ב־l_∞ שמתכנסת בכל רכיב אבל לא במטריקה של המרחב

10. האם שיכון איזומטרי בין מרחב לעצמו הוא בהכרח על (כלומר איזומטריה)?

(א) אתגר: האם תשובתך תשתנה אם נסתכל רק על קבוצות חסומות ב־$\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית?