פתרון תרגיל 7 בדידה להנדסה:

1. יש לבדוק 3 תכונות:

(א) רפלקסיביות: יש לבדוק האם כל איבר מתייחס לעצמו. אכן, לכל $k \in \mathbb{Z}$, $k - k = 0$ וברור ש־ $5|0$ ולכן $(k, k) \in R$.

(ב) סימטריות: יהי $(x, y) \in R$, צ"ל $(y, x) \in R$. $(x, y) \in R$ פירושו $5|x - y$. $(y - x) = -(x - y)$, ולכן גם $5|(y - x)$ ולכן $(y, x) \in R$.

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $(x, y), (y, z) \in R$, צ"ל $(x, z) \in R$. מהנתון נקבל ש: $5|x-y$ וגם $5|y - z$, ולכן גם:

$$5|((x - y) + (y - z))$$

כלומר: $5|(x - z)$, ולכן: $(x, z) \in R$. סה"כ, היחס שלנו הוא יחס שקילות. שני איברים מתייחסים זה לזה אם ההפרש ביניהם הוא כפולה של 5, כלומר מחלקות השקילות הן בעצם השאריות לחלוקה ב5. כלומר

$$\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R\}$$

אולי ראיתם את זה בליניארית ואולי לא ־ זהו השדה $\mathbb{Z}_5$ .

2. שוב, יש לבדוק את 3 התכונות שלנו:

(א) רפלקסיביות: יהי $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, צ"ל $((x, y), (x, y)) \in R$. ברור שמתקיים $xy = yx$ ולכן לפי הגדרת היחס $R$ נקבל שאכן $((x, y), (x, y)) \in R$.

(ב) סימטריות: יהי $((x, y), (z, w)) \in R$, צ"ל $((z, w), (x, y)) \in R$. מהנתון נקבל $xw = zy$ ובעצם $zy = xw$ ולכן $((z, w), (x, y)) \in R$.

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $((x, y), (z, w)), ((z, w), (u, v)) \in R$, צ"ל $((x, y), (u, v)) \in R$. מהנתון נקבל שמתקיים $xw = yz$ וגם $zv = wu$. מכיוון ש $w$ אינו 0 נקבל ש:

$$x = \frac{zy}{w}$$

ולכן:

$$xv = \frac{zvy}{w} = \frac{wuy}{w} = uy$$

ולפי הגדרת היחס נקבל ש $((x,y),(u,v)) \in R$. סה"כ, היחס הוא יחס שקילות.

על הקשר לרציונליים תנסו לחשוב לבד.

3. שוב, צריך להראות 3 תכונות:

(א) רפלקסיביות: לכל $x \in A$ ולכל $i$, מכיוון שכל היחסים רפלקסיביים מתקיים: $(x,x) \in R_i$ ולכן לפי הגדרת חיתוך, $(x,x) \in R$.

(ב) סימטריות: יהי $(x,y) \in R$. לכן, לפי הגדרת חיתוך, $(x,y) \in R_i$ לכל $i$; כל אחד מהיחסים האלו הוא סימטרי ולכן לכל $i$ נקבל $(y,x) \in R_i$ ולכן לפי הגדרת החיתוך, $(y,x) \in R$.

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $(x,y),(y,z) \in R$. לפי הגדרת חיתוך, $(x,y),(y,z) \in R_i$ לכל $i$; כל היחסים טרנזיטיביים, ולכן לכל $i$ נקבל $(x,z) \in R_i$ ולפי הגדרת החיתוך, $(x,z) \in R$. סה"כ, היחס שלנו הוא יחס שקילות.

4. אולי זה יפתיע אתכם, אך אנחנו נבדוק האם התכונות שלנו מתקיימות:

(א) רפלקסיביות: תהי $X \in P(A)$. ברור שמתקיים $X \cap B = X \cap B$ ולכן לפי הגדרת היחס, $(X,X) \in R_B$.

(ב) סימטריות: יהי $(X,Y) \in R_B$. לכן, $X \cap B = Y \cap B$ ולכן גם $Y \cap B = X \cap B$ ולכן $(Y,X) \in R_B$.

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $(X,Y),(Y,Z) \in R_B$. לכן, $X \cap B = Y \cap B$ וגם $Y \cap B = Z \cap B$ ולפי כלל המעבר של שיוויון נקבל $X \cap B = Z \cap B$ ולפי הגדרת היחס נקבל $(X,Z) \in R$. שלוש התכונות מתקיימות ולכן זהו יח"ש.

5. יהי $(X,Y) \in R_D$. לכן, $X \cap D = Y \cap D$. מהנתון $C \subseteq D$ נקבל $X \cap C = Y \cap C$ ולכן $(X,Y) \in R_C$ ולכן נקבל $R_D \subseteq R_C$.

6. $\Longrightarrow$: יהי $x \in A$. יחס שקילות הוא יחס רפלקסיבי, לכן $(x,x) \in A$. לפי ההגדרה של מחלקת שקילות, נקבל $x \in [x]_R$, ולכן (לפי הגדרת איחוד) $x \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$.
לכיוון השני, אם $x \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$ לפי הגדרת האיחוד קיימת מחלקת שקילות כך ש: $x \in [a]_R$ ולפי הגדרת מחלקת שקילות, $x \in A$. סה"כ, לפי הכלה דו־כיוונית, הראנו את הדרוש.