מבחן בקורס מתמטיקה בדידה (83-116)
מועד ב'
אוניברסיטת בר אילן

מרצה: ד"ר שמחה הבר.
מתרגלת: עדי ניב.
משך המבחן:
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
יש לענות על 4 שאלות מתוך 6.
ערך כל שאלה 25 נק'.

<u>שאלה 1:</u>

א. (15 נק') הוכיחו או הפריכו: $S \subseteq A \times B \Rightarrow \exists C \subseteq A, D \subseteq B : S = C \times D$.

הפרכה:

$$A = B = \{1,2\}.$$
$$S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$
$$\Downarrow$$
$$1,2 \in C, D$$
$$But \quad (2,2) \notin S$$

ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: $P(N) \setminus P(\{7\}) \supseteq P(N \setminus \{7\})$
(כאשר N היא קבוצת המספרים הטבעיים).

הפרכה:

$$\phi \in P(every \quad set) \Rightarrow \phi \in P(N \setminus \{7\}) \quad but \quad \phi \in P(N) \setminus P(\{7\})$$

<u>שאלה 2:</u>

א. (5 נק') הגדירו מהו יחס סימטרי

תהי A קב', ויהיה R יחס על A. נאמר ש-R הוא סימטרי אם
$$aRb \quad for \quad some \quad a,b \in A \quad \Rightarrow \quad bRa$$

ב. (10 נק') יהיו R ו S יחסי שקילות מעל קבוצה A.
הוכיחו שהקבוצה R∆S איננה יחס שקילות מעל A.

S,R יח"ש מעל A, בפרט כל האיברים מהצורה (a,a) עבור a מ-A ב-S וגם ב-R וכן בחיתוך שלהן. הוכחנו בכיתה כי $R\Delta S=(R\cup S)\setminus(R\cap S)$ ולכן האיברים מהצורה (a,a) עבור a מ-A אינם ב- R∆S. לכן יחס זה אינו רפלקסיבי ולכן איננו שקילות.

ג. (10 נק') תהא A קבוצת הסדרות באורך 100 של מספרים טבעיים.
S הוא יחס על A המוגדר כך: $(a_1,a_2,...,a_{100})R(b_1,b_2,...,b_{100})$ אם ורק אם לכל אינדקס $90<i\le 100$ מתקיים $a_i=b_i$. האם S יחס שקילות? אם כן תארו את קבוצת המנה.

כן:

רפלקסיבי $\forall(a_1,a_2,...,a_{100})\in A \quad a_i=a_i \quad \forall 90<i\le 100 \Rightarrow (a_1,a_2,...,a_{100})R(a_1,a_2,...,a_{100})\Rightarrow$

סימטרי $(a_1,a_2,...,a_{100})R(b_1,b_2,...,b_{100})\Rightarrow a_i=b_i\forall 90<i\le 100\Rightarrow b_i=a_i\forall 90<i\le 100\Rightarrow(b_1,b_2,...,b_{100})R(a_1,a_2,...,a_{100})\Rightarrow$

$(a_1,a_2,...,a_{100})R(b_1,b_2,...,b_{100})\wedge(b_1,b_2,...,b_{100})R(c_1,c_2,...,c_{100})\Rightarrow a_i=b_i\forall 90<i\le 100\wedge a_i=b_i\forall 90<i\le 100\wedge b_i=c_i\forall 90<i\le 100$
$\Rightarrow a_i=c_i\forall 90<i\le 100\Rightarrow(a_1,a_2,...,a_{100})R(c_1,c_2,...,c_{100})\Rightarrow$ טרנזיטיבי

סה"כ R יח"ש.

כל מחלקת שקילות תיוצג ע"י עשרת האינדקסים האחרונים שיהיו זהים בכל מחלקה.
מה שיבדיל בין מחלקה למחלקה הוא שוני בלפחות אחד מעשרת האינדקסים האחרונים.
לכן קב' המנה, שהיא קבוצת הנציגים, תיקבע ע"י עשרת אינדקסים אלו ולכן היא קבוצת הסדרות באורך 10 של מספרים טבעיים (או ליתר דיוק, קבוצת הסדרות באורך 10 של מספרים טבעיים משוכנת בסדרות מאורך 100 עם 90 אפסים בהתחלה: $(a_1,...,a_{10})\mapsto\left(\underbrace{0,...,0}_{90\text{ מקומות}},a_1,...,a_{10}\right)$-הוא

הנציג של מחלקת הסדרות שניגמרות ב- $\left(\underbrace{0,...,0}_{90\text{ מקומות}},a_1,...,a_{10}\right)$).

שאלה 3:

א. (9 נק')תהיינה D,C,B,A קבוצות ו- $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ פונקציות.
הוכח/הפרך **אחד מהסעיפים i-ii**:
i. $h\circ g\circ f$ על גורר ש- $h\circ g$ על.

הוכחה: נראה שאם gf על אז g על-

$\forall c \in C \exists a \in A: gf(a) = c$
$\forall a \in A \exists b \in B: f(a) = b$
$\Downarrow$
$\forall c \in C \exists b \in B: g(b) = gf(a) = c$

בפרט במקרה שלנו $h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$ על גורר $h \circ g$ על.

ii. $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה גורר ש- $h \circ g \circ f$ הפיכה.

$g \circ f$ הפיכה, לכן היא על ולכן גם g על. $h \circ g$ הפיכה, לכן היא חח"ע ולכן גם g חח"ע.
הראינו ש-g חח"ע ועל ולכן g הפיכה.

הרכבת פונקציות הפיכות

היא גם הפיכה ולכן $f = id_B \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ הפיכה (נתון ש-$g \circ f$ הפיכה)
ו-$h = h \circ id_C = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$ הפיכה (נתון ש-$h \circ g$ הפיכה). קיבלנו ש-f, g, h
הפיכות ולכן $h \circ g \circ f$ הפיכה כהרכבת פונקציות הפיכות. **משל.**

ב. (8 נק') תהיינה B,A קבוצות. נגדיר $f: P(A) \to P(B)$ ע"י $f(X) = X \cap B$.
הוכיחו כי f על אם ורק אם $A \supseteq B$.

$$A \supseteq B \Rightarrow \forall Y \subseteq B \quad Y \subseteq A \Rightarrow Y \cap A = Y \Rightarrow$$
$$\forall Y \subseteq B \exists Y \subseteq A: f(Y) = Y \cap B = Y$$.

f על. נניח שלא מתקיים $A \supseteq B$, אז קיים איבר y ב-B שאיננו ב-A, אזי לא קיים מקום ל-{y}
תחת f (כיוון שתמונות תת קב' של A היא בפרט ב-A).

ג. (8 נק') יהיו B,A קבוצות ויהיו $S,T \subseteq B$ ו- $X,Y \subseteq A$ כך ש- $\begin{cases} X \cap Y = S \cap T = \phi \\ X \cup Y = A, S \cup T = B \end{cases}$
הוכח אם קיימות פונקציות הפיכות $f: X \to S, g: Y \to T$ אז A ו-B שוות עוצמה.

נגדיר $h(x) = \begin{cases} f(x), x \in X \\ g(x), x \in Y \end{cases}$. טענה $h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), x \in S \\ g^{-1}(x), x \in T \end{cases}$ (f^{-1}, g^{-1} קיימות כי f,g
הפיכות).
נראה שהן אכן הופכיות:

$$h^{-1}h(x)=\begin{cases} h^{-1}(f(x)), x\in X \\ h^{-1}(g(x)), x\in Y\end{cases}=\begin{cases} f^{-1}(f(x)), f(x)\in S \\ g^{-1}(g(x)), g(x)\in T\end{cases}=x$$ כי f^{-1},g^{-1} הופכיות ל f,g:

$$hh^{-1}(x)=\begin{cases} h(f^{-1}(x)), x\in S \\ h(g^{-1}(x)), x\in T\end{cases}=\begin{cases} f(f^{-1}(x)), f^{-1}(x)\in X \\ g(g^{-1}(x)), g^{-1}(x)\in Y\end{cases}=x$$ כי f,g הופכיות ל f^{-1},g^{-1}:

<u>שאלה 4:</u>

א. (12 נק') בדוק האם שני הפסוקים שקולים, ללא שימוש בטבלת אמת:

$$\left[p\to(q\vee r)\right]\wedge\left[(p\wedge r)\to q\right]\ ;\ \ p\to q$$

שקולים:

אם $r=F$ אז צד שמאל שקול ל: $[p\to q]\wedge T\Leftrightarrow p\to q$.

אם $r=T$ אז צד שמאל שקול ל: $T\wedge[p\to q]\Leftrightarrow p\to q$

ב. (13 נק') בטא בצורה שקולה את: $(\neg p\to q)\to(r\vee p)$ באמצעות הקשרים $\wedge$, $\neg$ בלבד.

$$(\neg p\to q)\to(r\vee p)\equiv(p\vee q)\to(r\vee p)\equiv\neg(p\vee q)\vee(r\vee p)\equiv$$

$$(\neg p\wedge\neg q)\vee(r\vee p)\equiv\underbrace{(\underbrace{\underbrace{\neg p\vee p}_{T}\vee r)}_{T\vee r=T}\wedge(\neg q\vee r\vee p)}_{T\wedge a=a}\equiv\neg q\vee r\vee p\equiv$$

$$\neg(q\wedge\neg r\wedge\neg p)$$

<u>שאלה 5:</u>

א. (13 נק') מהו מספר האפשרויות לחלוקת 250 כדורים זהים ל-5 תאים, כך שבתא השני לפחות שני כדורים ובתא השלישי יותר משישה כדורים.

$$x_1+\ldots+x_5=250: x_i\begin{cases}\geq 2, i=2\\ >6, i=3\\ \geq 0, O.W\end{cases}\Rightarrow x_i\begin{cases}\geq 2, i=2\\ \geq 7, i=3\\ \geq 0, O.W\end{cases}$$

$$\text{שקול}: y_1+\ldots+y_5=250-2-7=241: y_i=\begin{cases}x_i-2\geq 0, i=2\\ x_i-7\geq 0, i=3\\ \geq 0, O.W\end{cases}\Rightarrow\binom{241+5-1}{5-1}$$

ב. (12 נק') כמה מספרים טבעיים קטנים מ-201 אינם מתחלקים ב-2,7- 11?

נגדיר:

$U=\{1,2,\ldots,200\}$ ו־

$X_i=$ קבוצת המספרים שמתחלקים ב־ i

$\Downarrow$

$X^c{}_i=$ קבוצת המספרים שלא מתחלקים ב־ i

נרצה: $\left|\bigcap_{i=2,7,11}X^c{}_i\right|$.

$$\left|\bigcap_{i=2,7,11}X^c{}_i\right|=\left|U-\bigcup_{i=2,7,11}X_i\right|=$$

$$200-\left(\sum_{i=2,7,11}|X_i|-\left|\underbrace{X_2\cap X_7}_{X_{14}}\right|-\left|\underbrace{X_{11}\cap X_7}_{X_{77}}\right|-\left|\underbrace{X_2\cap X_{11}}_{X_{22}}\right|+\left|\underbrace{X_2\cap X_7\cap X_{11}}_{X_{154}}\right|\right)=$$

$$200-(100+28+18-14-2-9+1)$$

<u>שאלה 6:</u>

מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לריצוף מתחם $2\times n$ ע"י מרצפות:

א. (13 נק') $1\times 2, 2\times 1$

ב. (12 נק') $1\times 1, 2\times 1$

א.

עבור ריצוף שנגמר ב- 2×1 וריצוף שנגמר בשני 1×2:

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$a_1=1, a_2=2$$

ב. עבור ריצוף שנגמר ב- 2×1 וריצוף שנגמר בשני 1×1:

$$a_n = 2a_{n-1}$$

$$a_1 = 2$$

בהצלחה!