תרגיל מספר1 מבנים אלגבריים

11 בנובמבר 2014

קבע לכל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות קבע האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה שמאלית/ימנית/דו"צ מצא אותה. במידה שמדובר בחבורה מצא את ההופכי של איבר נתון.

1. הקבוצה $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ עם הפעולה

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$$

כאשר $a_i + b_i$ הוא חיבור מודולו 2.
פתרון : חבורה כי זה מרחב וקטורי. היחידה היא $(0, 0, 0, 0)$ ועבור $v \in G$ ההופכי שלו הוא $-v$

2. יהא $\mathbb{F}$ שדה. אזי הקבוצה $G = \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ עם הכפל של השדה.
פתרון : זוהי חבורה. יש סגירות כי כפל של 2 איברים שונים מאפס תמיד שונה מאפס. היחידה היא $1_{\mathbb{F}}$ של השדה. עבור $x \in G$ קיים לו הופכי לפי הגדרת השדה (x שונה מאפס)

3. המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,|\, 0 < a \in \mathbb{R}, \, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זוהי חבורה. היחידה היא מטריצת היחידה $I_2 \in G$. עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שונה מאפס..) היא $\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

4. השלמים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה $a * b = a^b$
פתרון : זה לא אגודה כי $2 = 2 * 1 = 2 * (1 * 2) \neq (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 4$

5. תת קבוצה של הפולינומים $X = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,| p(1) = 0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.
פתרון : זה חבורה. כי מרחב וקטורי (או למתעקשים ת"מ)

6. השלמים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a * b = \max\{a, b\}$
פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא 0

7. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G = \left\{ \, (a, b) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a < b, \, a.b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \, \right\} \cup \{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.
פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא $\mathbb{R}$

8. תת קבוצה של המטריצות $G=\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זה אגודה. היחידות ימניות הן מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אין יחידות שמאליות.

9. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $G=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זה אגודה. צורה סכמטית של כפל היא

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אין יחידה.