תרגיל:

תהא G חבורה סופית ו- $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $\gcd(|N|, [G:N]) = 1$

הוכיחו כי N מכילה כל איבר $g \in G$ מסדר המחלק את $|N|$

(כלומר, $g^{|N|} = e \Rightarrow g \in N$)

פתרון:

יהי $g \in G$ המקיים $e = g^{|N|}$. $gN \in G/N$ הוא מקיים $(gN)^{|N|} = g^{|N|}N = N$

$$\Downarrow$$

$o(gN) \mid |N|$

מצד שני $o(gN) \mid |G/N|$, ומכיוון ש $|G/N|, |N|$ זרים $o(gN) = 1$

כלומר $gN = N \Rightarrow g \in N$

תרגיל:

תהא G חבורה $T = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$

א) אם $T \leq G$ אז $T \trianglelefteq G$

ב) אם $T \trianglelefteq G$ אז ב G/T רק eT מסדר סופי

פתרון:

א)

נניח $T \leq G$ צ"ל $T \trianglelefteq G$. יהי $t \in T$ $g \in G$ צ"ל $g^{-1}tg \in T$

$t \in T$ ולכן $o(t) < \infty$ נסמנו n. אזי $(g^{-1}tg)^n = g^{-1}t^ng = e$

ולכן $o(g^{-1}tg) < n$ ובפרט סופי ולכן $g^{-1}tg \in T$

ב)

נניח G/T חבורה ונניח בשלילה $gT \neq T$ מסדר סופי n

לכן, $T = (gT)^n = g^nT \Rightarrow g^n \in T \Rightarrow o(g^n) < \infty \Rightarrow e = (g^n)^m = g^{n \cdot m}$

$$\Downarrow$$

$g \in T$ מסדר סופי $\Rightarrow gT = T$ בסתירה

קיצוניות ל- $T\le G$:

1) G סופית $\Leftarrow$ $T=G$ $\Leftarrow$ $T\trianglelefteq G$ ו- $G/T\cong\{e\}$

2) $G=\mathbb{C}^*$ $T=\Omega_\infty=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$. בפרט כל מספר מרוכב $z\neq0$ המקיים $|z|\neq1$
מסדר ∞

תרגיל:

תהא G חבורה. הוכיחו שאם $G/Z(G)$ ציקלית אז G אבלית

פתרון:

$$\bar{g}=gZ(G),\quad G/Z(G)=\langle\bar{g}\rangle \Rightarrow G=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bar{g}^n=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}g^nZ(G)$$

צ"ל G אבלית. יהיו $a,b\in G$ צ"ל $ab=ba$

$$\exists i,j\in\mathbb{Z}\quad \exists z_1,z_2\in Z(G)\qquad a=g^iz_1,\ b=g^jz_2$$

$$\Downarrow$$

$$ab=g^iz_1g^jz_2=g^jz_2g^iz_1=ba$$

מסקנות:

1) אם G אינה אבלית אז $G/Z(G)$ אינה ציקלית ובפרט לא מסדר ראשוני

2) אם G חבורת p מסדר p^n אז $|Z(G)|\neq1,p,p^{n-1}$

משפט האיזו הראשון:

אם $\phi:G\to H$ אז $G/\ker\phi\cong Im(\phi)$

ובפרט אם ϕ חח"ע אז $G\cong Im(\phi)$. אם ϕ על אז $G/\ker(\phi)\cong H$

משפט:

אם G חבורה אז לכל תת חבורה נורמלית $H\trianglelefteq G$ קיים הומו' $\phi:G\to G'$
חבורה
כך ש $\ker\phi=H$

הוכחה:

$\phi:G\to G/H$, $g\mapsto gH$ מקיימת $\ker\phi=H$

דוגמאות:

1) $det: GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ היא על הגרעין = $SL_n(\mathbb{R})$ ולכן $GL_n/SL_n \cong \mathbb{R}^*$

$sgn: S_n \to \{\pm 1\}$ היא על $(n \geq 2)$ הגרעין = A_n ולכן $S_n/A_n \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $H = \{(x,y) \mid y = 7x\}$ נגדיר $\phi: G \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y - 7x$ על

וגם הגרעין = H ולכן $G/H \cong \mathbb{R}$

תרגיל:

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ הוכיחו כי $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$

פתרון:

נגדיר $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ היא הומ' ועל והגרעין = $\mathbb{Z}$

תרגיל:

מצאו חבורה G ו- $H \lhd G$ כך ש $G/H \cong H$

פתרון:

$G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$. $\phi: G \to \mathbb{Z} \times \{0\}$, $(x,y) \mapsto (0,y)$ הומ' על

והגרעין $\ker\phi = H$ וגם $G/H \cong \mathbb{Z} \times \{0\} \cong H$

תרגיל:

$\phi: G_1 \to G_2$ הומ'. מה האפשרויות ל $\ker\phi$ בהנחה ש $|G_1|, |G_2|$ זרים

פתרון:

$|Im\,\phi| \mid |G_2|$ כי $Im\,\phi \leq G_2$. בנוסף:

$$G_1/\ker\phi \cong Im\,\phi \Rightarrow \frac{|G_1|}{|\ker\phi|} = |Im\,\phi| \Rightarrow |Im\,\phi| \mid |G_1|$$

כיוון ש $|G_1|, |G_2|$ זרים:

$$|Im\,\phi| = 1 \Rightarrow Im\,\phi = \{e\} \Rightarrow \ker\phi = G_1$$

תרגיל:

$\phi:\mathbb{Z}_{14}\to D_{10}$ הומ'. מה האפשרויות ל- $\ker\phi$

פתרון:

כמו מקודם $|Im\phi|\,\big|\,|G_1|,|G_2|$ ולכן $|Im\phi|\,\big|\,gcd(14,20)=2$

אם $|Im\phi|=1$ אז $\ker\phi=\mathbb{Z}_{14} \Longleftarrow Im\phi=\{e\}$

אם $|Im\phi|=2$ אז $|\ker\phi|=\frac{14}{2}=7$

למשל $H=\langle 2\rangle$ מכיוון שכל איבר מסדר 7 נמצא ב-H (כל הצוג"ם) נקבל

שזו האפשרות היחידה

תרגיל:

מצאו את כל התמונות ההומומורפיות של D_4 (עד כדי איזו')

פתרון:

תת חבורות נורמליות של D_4:

1) D_4 , $\{id\}$

2) $\langle\sigma\rangle$ כי $\frac{|D_4|}{|\langle\sigma\rangle|}=2$

3) $Z(D_4)=\langle\sigma^2\rangle$

4) $\langle\sigma^2,\tau\rangle,\langle\sigma^2,\tau\sigma\rangle$ נבדוק את היוצרים σ^2 ברור כי במרכז

עבור τ:

$$\underbrace{(\tau^i\sigma^j)^{-1}\tau(\tau^i\sigma^j)}_{\sigma^{4-j}\tau^i\tau\tau^i\sigma^j}\overset{?}{\in}\langle\sigma^2,\tau\rangle$$

$$=\sigma^{4-j}\tau\sigma^j=\tau\sigma^j\sigma^j=\tau\sigma^{2j}\in\langle\tau,\sigma^2\rangle$$

מה התמונות ההומומורפיות המתקבלות? $D_4/\ker\phi\cong Im(\phi)$

1) $D_4/D_4\cong\{e\}$, $D_4/\{e\}\cong D_4$

2) $D_4/\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ כי מסדר 2

3) הסדר $=4$, ולכן אבלית. ב- $D_4/Z(D_4)$ כל האיברים מסדר $1,2$ ולכן $\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

4) $\mathbb{Z}_2\cong \ldots$ כי מסדר 2

משפטים:

1) G, $H\leq G$, $N\trianglelefteq G$ אז $NH/N\cong H/N\cap H$

2) G, $k,H\trianglelefteq G$ $k\leq H$ אז $G/H\cong (G/k)/(H/k)$

3) תת חבורה/תת חבורה נורמלית של G/k הן מהצורה H/k עבור תת חבורה/תת חבורה נורמלית $k\subseteq H\subseteq G$

הגדרה: G תקרא פשוטה אם אין לה תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית

דוגמא: $\mathbb{Z}_p$ (p ראשוני)

תרגיל:

החבורות האבליות הפשוטות היחידות הן $\mathbb{Z}_p$-ים או $\{e\}$ (p ראשוני)

פתרון:

תהא G אבלית פשוטה. אם $G=\{e\}$ סיימנו. אחרת

$$\exists e\neq g\in G \Rightarrow \{e\}\neq \langle g\rangle \trianglelefteq G \Rightarrow G=\langle g\rangle \Rightarrow G\cong \mathbb{Z}_n$$

עבור $n=o(g)$ ו $\mathbb{Z}_n$ פשוטה רק עבור n ראשוני

תרגיל:

תהא G חבורה $G\neq k\trianglelefteq G$ מקסימלית ביחס להכלה. אז G/k פשוטה

הוכחה:

ממשפט ההתאמה תת חבורה נורמלית של G/k היא מהצורה H/k עבור $k\subseteq H\trianglelefteq G$. כיוון ש k מקסימלית $\Leftarrow H=G$ או $H=k$

תרגיל:

מי הם תתי החבורות של $\mathbb{Z}_n$?

פתרון:

$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ תת חבורה של $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ מהצורה $H/n\mathbb{Z}$ כאשר

$n\mathbb{Z} \subseteq H \leq \mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $H = m\mathbb{Z}$ (כי $H \leq \mathbb{Z}$) ו- $m|n$ (כי $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$)

! $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}_n$ (כי $\phi: m\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}_n$, $mx \mapsto m\bar{x}$ אפימורפיזם)

$\ker\phi = \{mx \mid m\bar{x} = \bar{0}\} = \{k \mid k \equiv 0 \mod n\} = n\mathbb{Z}$

תרגיל:

תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$ מאינדקס ראשוני p ו- $k \leq G$

הוכיחו כי $(k \leq N)$ או $(G = Nk$ וגם $[k : k \cap N] = p)$

פתרון:

$N \leq Nk \leq G$ ממשפט ההתאמה $N/k \leq Nk/N \leq G/N$

$$\Downarrow$$

$|Nk/N| = 1$ או p

אם $|Nk/N| = 1$ אז $Nk = N$ $\Leftarrow$ $k \leq N$

אם $|Nk/N| = p$ אז $Nk = G$ $\Leftarrow$ לפי איזו' 2 $G/N \cong Nk/N \cong k/N \cap k$