

אלגברה לינארית למורים- תרגיל 3

שאלה 1

עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד/ אין פתרון/ אינסוף פתרונות?

$$\begin{cases} ax + ay - az = a \\ -x + 4y - az = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 1 \end{cases} .א$$

פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 + aR_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + 2R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a - a^2 & a \\ 0 & 0 & 4 - 2a & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a(1+a) & a \\ 0 & 0 & 2(2-a) & 1 \end{array} \right)$$

עבור $a = 2$ נקבל שורת סתירה ולכן במקרה זה נקבל שאין פתרון

עבור $a = 0$ נקבל מטריצה מהצורה: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right)$ נקבל כי יש משתנה חופשי ולכן במקרה זה יש

אינסוף פתרונות

עבור $a \neq 0, 2$ אין משתנים חופשיים ולכן זה מצב של פתרון יחיד

$$\begin{cases} 3x + y + az = 0 \\ 6x + ay + (2a + 1)z = 1 \\ 9x + 3y + (a^2 + 2)z = a - 1 \end{cases} \text{ ב.}$$

פתרון

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a & | & 0 \\ 6 & a & 2a+1 & | & 1 \\ 9 & 3 & a^2+2 & | & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-3R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & a & | & 0 \\ 0 & a-2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2+2-3a & | & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & a & | & 0 \\ 0 & a-2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & | & a-1 \end{pmatrix}$$

עבור $a = 2$ נקבל שורת סתירה ולכן במקרה זה נקבל שאין פתרון

עבור $a = 1$ נקבל מטריצה מהצורה: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ נקבל כי יש משתנה חופשי ולכן במקרה זה יש

אינסוף פתרונות

עבור $a \neq 1, 2$ אין משתנים חופשיים ולכן זה מצב של פתרון יחיד

פתרון שאלה 2

חשבו את המטריצה AB עבור המטריצות A ו-B הבאות. במידה והמכפלה לא מוגדרת הסבירו למה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

פתרון

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

המכפלה לא מוגדרת משום ש-A מסדר גודל 3x2 ואילו B מסדר גודל 3x3 וכדי שהמכפלה תיחיה מוגדרת צריך שמספר העמודות ב-A יהיה שווה למספר השורות ב-B וזה לא מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

פתרון

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$