

תורת גורם (7) דאטגדרה אינאריות

הנשוא: צורת גורם של מטריצה טרנספורמציית אינאריות להפולינאם האופייני שלהן מעברת לגורמים אינאריים

דשיעור הקודם ראינו את המשפטים הבאים:  
משפט 1: כל מטריצה נילפוטנטית צומה למטריצה גורם נילפוטנטית.  
משפט 2: אם מטריצה נילפוטנטית A צומה למטריצה גורם נילפוטנטית

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

את מס' הגורמים k ומימדיהם  $n_1, \dots, n_k$ , ומה ערכים חז-משעיה  
ג' המטריצה הנפרדה, וממילא A צומה למטריצה גורם G יחידה  
(עצ כפי שינוי סדר הופעתם של גורמי גורם G).

שערה: תפי A מטריצה נילפוטנטית ונניח כי A צומה למטריצה גורם  
נילפוטנטית המוכנה מ- k גורמים, כפי שהגורם הנבחר ציור הוא  
מסדר  $n_1$  א"כ:

א.  $n_1$  שונה לאינזרס הנילפוטנטיות של A.

ב. מס' הגורמים k שונה ל-  $\rho(A)$ , כאשר  $\rho$  הוא הסדר של המטריצה  
A ו-  $\rho(A)$  הוא צבחה. [עצ כאן-תזכורת]

דשיעור זה אנו נראה כיצד למצוא צורה גורם למטריצה שזוהי נילפוטנטית  
הצורה: א"כ גורם גורם מסדר k, השייך לערך עצמי  $\lambda$ , הוא מטריצה  
הקואציה מסדר k קצת הצורה:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

מטריצה זו מסומן כ-  $J_k(\lambda)$ .

ג. מטריצה גורמים אלכסונית המוכנה מחלקי גורם  $J_k(\lambda)$   
(לאוצרוקא שייכים לאלגם ערכים עצמיים  $\lambda$ ) נקראת מטריצה גורם.

הערה: הנצרה זו מכלילה את ההנצרה של גורם גורם נילפוטנטי -  $J_k$  מהשיעור  
הקודם, שהרי גורם גורם נילפוטנטי  $J_k$  הוא גורם גורם  $J_k(0)$   
השייך לערך 0.



# תורת ערכים - 10 - צורת ג'ורדן

מ

$\text{tr } A = \text{סכום ערכים עצמיים של מטריצה } A$   
 $|A| = \text{מכפלת ע"ע}$

הערה: עשיתי דוגמה של מטרי:

$\text{rank } A = k$  אם  $A$  היא הפיכה (קובציות ים ע"ע  $\neq 0$ ) ונ"ח  
 $\dim(\mathbb{F}^n) = n$

ואנו יוצגם על-ע  $\dim(\mathbb{F}^n) = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{ker } A)$

$n = k + \dim(\text{ker}(A - 0I))$  (הסדר מאחורה)

ע"ע של  $0$

$\left\{ \vec{v} \mid (A - 0I)\vec{v} = \vec{0} \right\} = \text{ker}(A - 0I) = \text{ker } A$

~~ע"ע של  $0$  הוא  $\text{ker } A$~~

הערה: אם  $A$  נלפוטנטית (ק"ה מ"ק של  $A^m = 0$ ) האם הקטן ביותר  $S$  שעזרו  $A^S = 0$  קטן-אינדקס הנלפוטנטיות של  $A$ . נניח שאינדקס הנלפוטנטיות של  $A$  זה  $S$ .  
 אם הפ"ח שלה הוא  $M_A(x) = x^S$  (מעלת הפולינום המינימלי היא אינדקס הנלפוטנטיות של המטריצה)

כ"א יש לה חזק ע"ע  $0$  ולכן כפרט מתקיימת ההעדרה הקובצית (מטריצה נלפוטנטית יש ע"ע יחיד- $0$ )

$n - k = \text{ר"ע של ע"ע } 0$

אם  $A$  נלפוטנטית, יקרא "מסדר חזית"  $\text{rank } A$  שלה הוא  $P_A(x) = x^n$ . (מסדר המטריצה  $A$ )

~~נסקור לצורות ג'ורדן: (כבר התחננו לנסות על זה שזה שגור...)~~

הערה: ע"ע  $k \times k$  של  $\lambda$   $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$  הפ"ח = הפ"ח (תוכוח) (ק.ב.)

~~ונ"ח ע"ע של  $\lambda$  הוא  $(x - \lambda)^k$~~

~~ולכן ע"ע  $k \times k$  של  $\lambda$  הפ"ח = הפ"ח =  $(x - \lambda)^k$~~

# צורת זורדן

קבוצת זורדן היא מהצורה  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$  ומתקיים  $\phi^k = \phi^k = (\lambda - \lambda)^k$

דוגמה:  $\phi^2 = \phi^2 = (\lambda - \lambda)^2$   $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$

תמיד יש מבטוק זורדן יחיד עבור כל יחיד (הוא  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ )

עצום עבור המטריצה יש וע  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

בה קורה כי וע מקיים  $(A - \lambda I)v = 0$  ואז

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה בצורת זורדן  $\begin{pmatrix} \text{קבוצת זורדן} & & 0 \\ & \text{קבוצת זורדן} & \\ 0 & & \text{קבוצת זורדן} \end{pmatrix}$

⊕ כל מטריצה A שפירא שלה מתפרק לזוהים אינארטים  
 זוהי מטריצה בצורת זורדן, בצורה הבאה:

נניח  $A \in M_n(F)$  אם פירא מתפרק לזוהים אינארטים. אז המטריצה בצורת זורדן הפשוטה לה מקיימת: א סכום סיבובי הכלוקים המתאימים אלס א  
 הוא הרבוי האלסברי של א בפירא  
ב. מס הכלוקים של אלס א זה הרבוי האינארטלי של א  
ג. גודל הכלוק (הצב) של אלס א הוא הרבוי של  $(\lambda - \lambda)$  בפירא  
 בפירא המינימלי

← פירא פירא פירא פירא פירא

1. הרבוי האלסברי של א  $\leftarrow$  פירא  $\leftarrow$  סכום סיבובי הכלוקים
2. הרבוי האלסברי של א  $\leftarrow$  פירא  $\leftarrow$  גודל הכלוק הפיראלי ביותר
3. הרבוי האינארטלי של א  $\leftarrow$  מס הכלוקים



6

מוצאים פ"א, פ"ג, פ"ד, ו"ה של  $\chi$  הפולינום.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

צ"ל: 1

לאחר חישוב:

פ"א:  $(\chi+2)(\chi-1)^3$

(נתן הפולינום הכי גדול של  $\lambda=1$  הוא באדר 2 ושל  $\lambda=2$  באדר 1)

פ"ג:  $(\chi+2)(\chi-1)^2$

נתן סטטוס צדד

צדד  $\lambda=1$ : פ"א = 1 (הפולינום = 1)

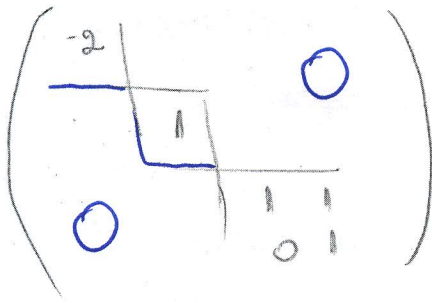
פ"ג = 1 (נתן יש פולינום צדד)

צדד  $\lambda=1$ : פ"א = 3 (נתן סטטוס צדד הפולינום = 3)

פ"ג = 2 (נתן יש פולינום)

סה"כ  $\rightarrow 3 \times 3 = 2+2$  (לוק  $\rightarrow 1+1$ )

נתן צורת צדדן המתאימה היא



סטטוס הפולינום  
פ"א משנה

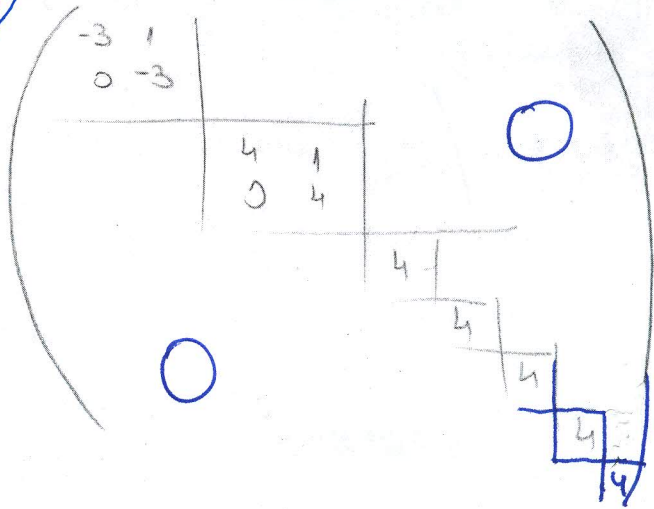
נתן פ"א:  $(\chi+3)^2(\chi-4)^7$ , פ"ג:  $(\chi+3)^2(\chi-4)^2$

נתן הצורות האפשריות לצדדן הצדדן?

פיתרון: מהפ"א נסוק שהפולינום הכי גדול של  $\lambda=3$  הוא באדר 2 ושל  $\lambda=4$  הוא באדר 2

מהפ"ג נסוק סטטוס צדדני הפולינום של  $\lambda=3$  הוא 2 ושל  $\lambda=4$  הוא 2

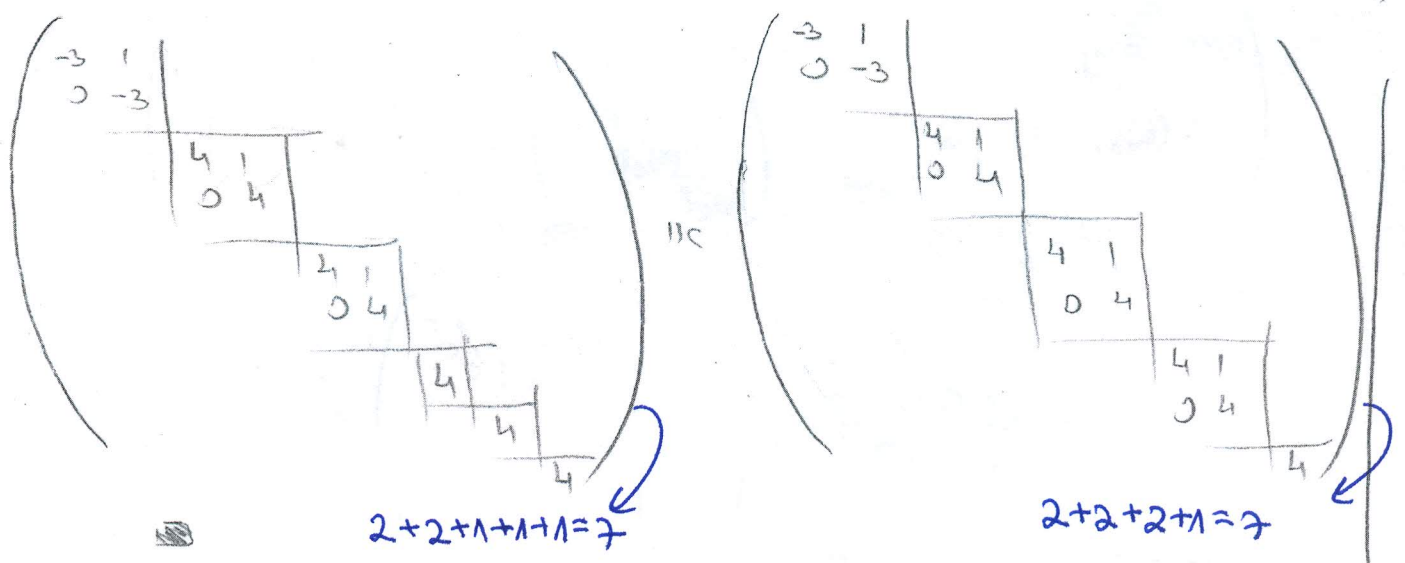
צדד  $\lambda=3$  נתן להסיק שיש רק פולינום אחד קבוע 2, אולי צדד  $\lambda=4$  אינו לא יודע  
 נתן הצורות האפשריות יק:  $\lambda=4$  אולי מסתדר הפולינום כי צדד הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda=4$ , וצדד לא נתן קבועה, לכן יש כמה צורות אפשריות.



$2+1+1+1+1+1=7$

7

300



$2+2+1+1+1=7$

$2+2+2+1=7$

~~(אם היה מניין שיש לנו את המספרים)~~

$A^3 \neq 0$  וניתן  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  (3)  
 $\text{rank } A = 5$

מכאן אתם צריכים להבין את המספרים  
פיתרון:

(סכום סגרי העליונים הוא 8)  $P_A(x) = x^8$  אם  $A$  נעלם  $\leftarrow$  מן 0 על 0

$M_A(x) = x^\alpha$  ,  $\alpha \leq 8$

$M_A(x) \neq x^3$  מן  $A^3 \neq 0$  (4)

$4 \leq \alpha \leq 8$  עבור  $M_A(x) = x^\alpha$   
 אלו יתנו  
 קבוצה של  
 כוונות:  
 $M_A(x) = x^2$   
 $A^2 = 0$   
 $A^3 = A^2 \cdot A = 0 \cdot A = 0$  (ש/כ)  
 $A^3 \neq 0$ : וניתן  
 לראות.

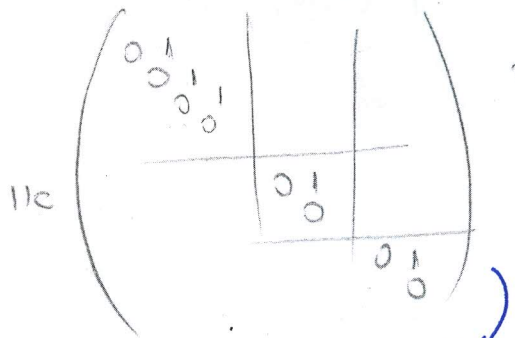
$n - \text{rank}(A) = 8 - 5 = 3$  אם  $0 \in \sigma(A) \leftarrow \text{rank } A = 5$  (5)

אם  $0 \in \sigma(A)$  אז יש 3 חלקים 0 על 0

$\alpha = 4$  אם  
 כל החלקים  
 יהיו בגודל  
 4 לכל היותר



$4+3+1=8$



$4+2+2=8$

2

צ"ב

(הערה: סימון מקובל זה אפילו עבור הט"ל בע"מ הקודם)

$$\left( \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} J_4(0) \\ J_2(0) \\ J_2(0) \end{pmatrix} = J_4(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(0) \right)$$

$\alpha=5$  rank

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right) = J_5(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$$

$\alpha=6$  rank

$$\left( \begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) = J_6(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$$

כאן ייתכן  $\alpha=7, 8$  כי rank לא יהיה 3 בלוקים

יהיה rank  $A=5$ .

צ"ב



מטריצה המייצגת ה־ $A$   $\text{Im}(A) = C(A)$

$$\text{Im}(A) = C(A)$$

מרחב העמודה של  $A$

אמרו קשיקוים קובאים ש:

$$\dim(\text{Im}(A)) = \dim C(A)$$

לפי:

$$\dim C(A) = \dim R(A) = \text{rank}(A)$$

מרחב השורה של  $A$

אלו אלו יוצעים ש:

$\Downarrow$

$$\dim \text{Im}(A) = \text{rank}(A)$$

← (הערה)

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A - I))$$

$$\ker(A - I) = \{v \in V \mid (A - I)v = \vec{0}\}$$

זהו המרחב הנגזר וזו ע"ש 0

$$\dim(\ker(A - I)) =$$

מרחב מרחב הנגזר =  $\{v \in V \mid (A - I)v = \vec{0}\}$

רפי הנגזר

(הערה: זהו המרחב הנגזר)

הערה:

אם  $A$  היא מטריצה המייצגת ה־ $A$  אז  $\ker(A - I)$  הוא המרחב הנגזר של  $A$ .