הרצאה VI- אינפי 1

המשך מהרצאה קודמת:

אם קיים גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ אזי $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = L$. נוכיח כעת עבור L שהוא $+\infty$. נקבע E ממשי.

קיבלנו $\exists\bar{n}\forall n \geq \bar{n} :\ x_n > E, and\ then\ x_{\bar{n}}, x_{\bar{n}+1}, \ldots > E$. ז"א ש $l_{\bar{n}} = inf x_n \geq E$. ומתקיים כי $\forall n \geq \bar{n} :\ l_n \geq l_{\bar{n}} E$.

ועי"פ הגדרה נקבל כי $\lim_{n\to\infty} l_n = +\infty$. ועי"פ הלמה על הסנדוויץ', קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty} l_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} L_n$, ועי"פ המשפט נקבל כי הגבול הינו $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. עבור השלילי ההוכחה דומה מאוד.

<u>משפט</u>: A תת קבוצה של הממשיים. נגדיר: $-A \coloneqq \{y = -x\ , x \in A\}$. אזי: $\sup(-A) = -\inf(A)\ , \inf(-A) = -supA$.

הוכחה: הוכחנו זאת בתרגיל בית מספר 2.

מסקנות לגבי גבולות: $\overline{\lim}_{n\to\infty} -x_n = -\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ולהיפך $-\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} -x_n$.

<u>גבולות של סדרות ספציפיות</u>:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 : (p \in \mathbb{N})$

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 : (p > 0)$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 : (q > 1, k \in \mathbb{N})$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 : (q > 1)$

הוכחה:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ ולפי למת הסנדוויץ, $0 < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n}$. אם P לא טבעי, אלא שבר מסויים, נוכיח לפי הגדרה. נסמן: $p = \frac{1}{k}$. ונחשב את הגבול ע"י $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt[k]{n}} > 0$ ונקבל כי $n > (\frac{1}{\varepsilon})^k$ ונגדיר את $\bar{n}$ ע"י $\bar{n} = \left[(\frac{1}{\varepsilon})^k\right] + 1$. כאשר הסוגריים המרובעות מסמנות את המספר המקסימלי השלם שקטן ממה שבתוך הסוגריים. לדוגמא: $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$. משל.

2) נסמן $\alpha_n \coloneqq \sqrt[n]{p} - 1$. ונקבל $\alpha_n + 1 = \sqrt[n]{p}$. נקבל כי $p = (1+\alpha_n)^n > n\alpha_n$. ואז $0 < \alpha_n < \frac{p}{n}$ ולכן הגבול המתקבל הוא אפס, ואז הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

3) נסמן $\alpha_n \coloneqq \sqrt[n]{n} - 1$. ונקבל $\alpha_n + 1 = \sqrt[n]{n}$, ומתקיים כי $n = (1+\alpha_n)^n$ ואז מתקבל $n > \frac{n(n-1)\alpha_n^2}{2}$ ומכאן שמתקיים כי $0 < \alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}$ נבצע פעולת שורש ונקבל $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n + 1 = 0 + 1 = 1$. משל.

4) נגדיר $q = 1 + \alpha$ ואז $q^n = (1+\alpha)^n$ ומתקיים *n>k+1*. ואז $n > 2k$ $and\ then\ n - k > \frac{n}{2}$.

לאחר פיתוח נראה כי מתקיים $0 < \frac{n^k}{q^n} < \frac{2^k(k+1)!}{\alpha^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}$, ושוב, עי"פ למת הסנדוויץ', מתקבל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$.

5) $x_n \coloneqq \frac{q^n}{n!}$ נבדוק אם היא מונוטונית יורדת. מתקיים כי $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{q^n} < 1$, ולכן קיים גבול שהוא L מסויים. מתקיים כי הגבול ממשי, $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$, ואז $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} x_n = 0 \cdot L = 0$.

<u>עוד על e מספרו של אוילר</u>:

משפט: $e=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

הוכחה: נסמן $e_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. וגם $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, ובצורתו המפורשת $x_n=1+1+\cdots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}$.

ומתקיים כי $x_n\le e_n$. וע"פ משפט מתקיים $\lim_{n\to\infty}x_n\le\lim_{n\to\infty}e_n$.

נקבע כי K טבעי, ונקבל כי $x_n\ge 1+1+\cdots+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$ וגם $n>k$. ואז מתקיים $e\ge e_k$.

קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty}x_n\ge\lim_{n\to\infty}e_n$ ואז נקבל כי $\lim_{n\to\infty}x_n=e$

כעת נוכיח כי e אי רציונאלי: ראשית, נבדוק $e-e_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{N!}\right)-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$ כאשר N גדול ממש מn. נקבל כי $e_N-e_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{N!}-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})\le\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{N-n-1}})$.

מכאן ניתן לראות שמדובר בסכום סדרה הנדסית, ונקבל כי $\frac{1}{n+2}(1+\frac{1}{(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{N-n-1}})\le\frac{1}{n+2}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$.

ונקבל כי $e_N-e_n\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ כאשר N שואף ל∞.

ומכאן שמתקיים $0<e_N-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$.

<u>משפט</u>: e אי רציוניאלי.

הוכחה: נניח ש$e=\frac{p}{q}$, כאשר p,q ממשיים. נקבל כי $\frac{p}{k}=1+\cdots+\frac{1}{n!}+\alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n|<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$. נכפול את שני האגפים ונקבל כי $\overbrace{(n+1)!\frac{p}{q}}^{\text{שלם}}=\overbrace{(n+1)!\left(1+\cdots+\frac{1}{n!}\right)}^{\text{שלם}}+(n+1)!\,\alpha_n$. אבל $(n+1)!\,\alpha_n$ לא שלם, כי $|\alpha_n(n+1)!|<\frac{1}{n+1}$ בסתירה. לכן e לא רציונאלי. משל. (יותר מזה, e הינו מספר טרנסצנדטי) .

<u>גבולות חלקיים</u>:

מה זה בכלל? גבול חלקי זה גבול של תת סדרה.

<u>הגדרה</u>: תת סדרה: נניח שיש לנו סדרה, נבחר ממנה איברים ספציפייםף ונבחר שיטת נומרציה חדשה עבורה. עד שנקבל k איברים. האינדקס של הסדרה החדשה שלנו הוא k. נחזור להגדרה המקורית של סדרה: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $f(n)=x_n$. נבצע הרכבה ונקבל כי $x_{n_k}=f(n(k))$ כאשר $n(k)=n_k$.

<u>הגדרה</u>: גבול חלקי: $l\in\overline{\mathbb{R}}$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת סדרה $\left\{x_{n_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=l$.

<u>דוגמא</u>: $x_n=(-1)^n$, גבולות חלקיים הם 1, ו-1-.