הבסיס המתמטי העומד מאחורי חקירת פונקציות

משפט

תהי f גזירה n פעמים, ומקיימת $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$.

1. אם n זוגי: a נקודת מקסימום או מינימום אם $f^{(n)}(a)><0$ בהתאמה.
2. אם n אי זוגי: a אינה נקודת קיצון.

הוכחה

מספיק להוכיח את המקרה $a=0$.

הזזה: נניח שהוכחנו עבור $a=0$. בהינתן f עם a כללית, נגדיר: $g(x)\coloneqq f(x+a)$.
עפ"י הנתון וכלל השרשרת, נקבל: $g^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)$, וקיבלנו את המקרה שהוכח.

נפתח לפי טיילור מקלורן מסדר n: בסביבת 0, מתקיים:

$$f(x)=f(0)+\overbrace{f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+\cdots+}^{=0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+r(x)$$

כאשר:

$$\frac{r(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

כלומר:

$$f(x)-f(0)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+r(x)=\left(\overbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{r(x)}{x^n}}^{\coloneqq b}\right)\cdot x^n$$

ניקח:

$$0<\varepsilon<\left|\frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{\neq 0}}{n!}\right|$$

ניקח סביבה של 0 בה:

$$\left|\frac{r(x)}{x^n}\right| < \varepsilon$$

בסביבה זו, הסימן של b זהה לסימן של: $f^{(n)}(0)$.

1. <u>אם n זוגי</u>: $x^n > 0$ בסביבה המנוקבת.

   למשל, אם $f^{(n)}(0) > 0$, נקבל: $f(x) - f(0) > 0$ בסביבה, ולכן 0 נקודת מינימום של f.

   המקרה השני דומה.

2. <u>אם n אי זוגי</u>: $x^n > 0$ עבור $x > 0$ בסביבה ו - $x^n < 0$ עבור $x < 0$ בסביבה.

   לכן, קיימות בסביבה נקודות בהן $f(x) > f(0)$ וקיימות נקודות בהן $f(x) < f(0)$,

   לכן 0 אינה נקודת קיצון.

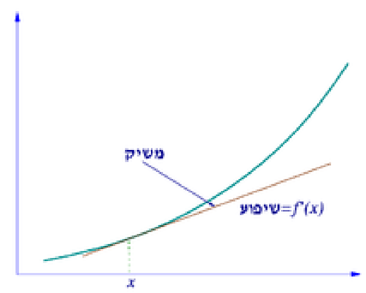
■

הגדרה

משוואת המשיק לגרף פונקציה f הגזירה בנקודה a היא:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)}$$

המחשה

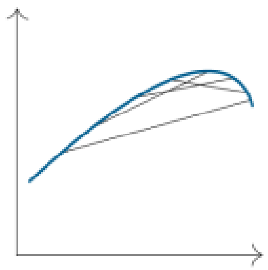


הגדרה

- נאמר ש f – **קעורה** ב – a, אם גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק בסביבה של a.

כלומר, קיימת סביבה מנוקבת של a, בה: $f(x) < g(x) \coloneqq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$.

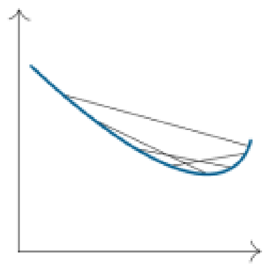
המחשה



- נאמר ש $f -$ **קמורה** ב $a -$, אם גרף הפונקציה נמצא מעל למשיק בסביבה של a.

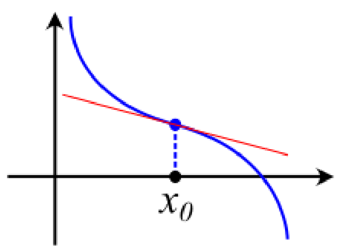
כלומר, קיימת סביבה מנוקבת של a, בה: $f(x) > g(x) \coloneqq f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$.

המחשה



- נאמר ש $a -$ **נקודת פיתול** אם קיימות סביבות חד צדדיות בהן הסימן: $f(x) - g(x)$ שונה (כאשר $g(x) \coloneqq f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$).

המחשה



למה

אם $f''(a)$ קיימת, אזי:

אם $f''(a) <> 0$, אזי f קמורה או קעורה ב - a בהתאמה.

הוכחה

מספיק להוכיח עבור $a = 0$ (הזזה).

עפ"י פיתוח טיילור מקלורן:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + r(x)$$

$$g(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{r(x)}{x^2}\right) \cdot x^2$$

באופן דומה להוכחה הקודמת, הסימן של $f(x) - g(x)$ זהה לסימן של $f''(0)$, בסביבה מספיק קטנה של 0.

$\blacksquare$

מסקנה

אם $f''(a)$ ו $a -$ נקודת פיתול, אזי $f''(a) = 0$.

זוהי דרך למצוא נקודות החשודות לפיתול.

תרגיל

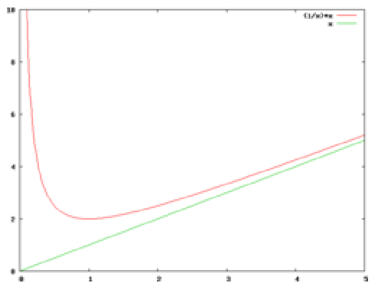
תהי f גזירה $n \geq 3$ פעמים ב $a -$ ומקיימת: $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ו - $f^{(n)}(a) = 0$.

הוכח: n אי זוגי $\Leftrightarrow$ a נקודת פיתול.

הגדרה

- **אסימפטוטה** של פונקציה f ב - ∞ היא ישר $y = a \cdot x + b$ כך ש:
$$f(x) - (a \cdot x + b) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$
- **אסימפטוטה** של פונקציה f ב - $-\infty$ היא ישר $y = a \cdot x + b$ כך ש:
$$f(x) - (a \cdot x + b) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

המחשה



מציאת אסימפטוטה ב - ∞

נניח $0 \xrightarrow[x\to\infty]{} f(x)-(a\cdot x+b)$.

נחלק ב - $\frac{1}{x}$, ונקבל:

$$\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

לכן:

$$\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}a$$

כלומר, אם קיימת אסימפטוטה ב - ∞, אזי:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

ואז:

$$f(x)-a\cdot x-b=f(x)-(a\cdot x+b)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

לכן:

$$f(x)-a\cdot x\xrightarrow[x\to\infty]{}b$$

אם a,b קיימים כך שהגבולות הנ"ל קיימים, אז: $f(x)-a\cdot x\xrightarrow[x\to\infty]{}b$, לכן:

$$f(x)-(a\cdot x+b)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

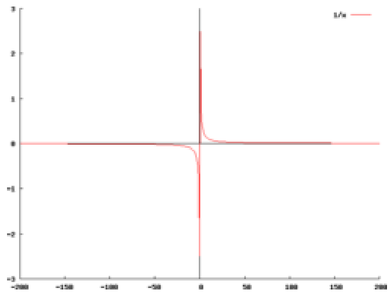
לכן, $(a\cdot x+b)$ אסימפטוטה ב - ∞.

מציאת אסימפטוטה ב - $-\infty$ דומה.

הגדרה

אסימפטוטה אנכית היא ישר $x=a$ כך ש - $|f(x)|\xrightarrow[x\to a]{}\infty$.

המחשה



■

האינטגרל הלא מסוים

הגדרה

g היא **פונקציה קדומה** של f בתחום A אם לכל $x \in A$: $g'(x) = f(x)$. נדרוש כי לכל $x \in A$, קיימת לפחות סביבה חד צדדית של x המוכלת ב - A.

במקום:

$$\frac{dg}{dx} = f$$

נכתוב:

$$dg = fdx$$

דוגמה

$\sin(x)$ היא פונקציה קדומה של $\cos(x)$.

כלומר:

$$dsin(x) = \cos(x)\,dx$$

הערה

אם g קדומה של f, אזי לכל קבוע $c \in \mathbb{R}$, הפונקציה $g(x) + c$ קדומה של $f(x)$:

$$(g(x) + c)' = g'(x) + 0 = f(x)$$

יתר על כן, כל פונקציה קדומה של f היא מהצורה $g(x) + c$, כאשר $c \in \mathbb{R}$.

הוכחה

תהי $h(x)$ קדומה.

$$\big(h(x) - g(x)\big)' = h'(x) - g'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

לכן הפונקציה $h(x) - g(x)$ קבועה, $c \coloneqq h(x) - g(x)$, לכן $h(x) = g(x) + c$.

$\blacksquare$

הגדרה

האינטגרל הלא מסוים של פונקציה f הוא קבוצת כל הפונקציות הקדומות של f, ומסומן:

$$\int f(x)dx$$

עפ״י ההערה לעיל, ניתן לבחור פונקציה קדומה אחת של $f(x)$, $g(x)$, ולכתוב:

$$\int f(x)dx = g(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

דוגמה

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

הערה

לא תמיד קיימת פונקציה קדומה.

למשל:

$$\int [x]dx$$

לא קיים, כיוון ש - $[x]$ בעלת אי רציפות מסוג ראשון, ולנגזרות תתכן רק אי רציפות מסוג שני.

למה (לינאריות)

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)dx = \alpha \cdot \int f dx + \beta \cdot \int g dx$$

הוכחה

לינאריות הנגזרת.

יהיו $h_1(x)$ קדומה ל - $f(x)$ ו - $h_2(x)$ קדומה ל - $g(x)$.

אזי:

$$\left(\alpha \cdot h_1(x) + \beta \cdot h_2(x)\right)' = \alpha \cdot h_1'(x) + \beta \cdot h_2'(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$$

לכן:

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)dx = \alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2 + c = \alpha \cdot \int f dx + \beta \cdot \int g dx$$

■

<u>תוספת ללמה</u>: יש להניח $\alpha \neq 0$ או $\beta \neq 0$. לחלופין, ניתן להוסיף קבוע שרירותי.