פתרון תרגיל 8 אנליזה הרמונית תש"ף

26 בדצמבר 2019

1. טור סינוסים הוא טור פורייה של ההמשכה האי־זוגית:

$$f_{odd}=\begin{cases} x^2 & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -x^2 & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

ואפשר לרשום:

$$f_{odd}=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le\pi \\ -x^2 & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

הפונקציה הזו גזירה בכל נקודה (בדקו מה קורה ב־$x=0$!) בתוך הקטע, ולכן הטור (שנסמנו S כהרגלנו) מתכנס לפונקציה: $S\left(x\right)=f_{odd}\left(x\right)$ לכל $x\in\left(-\pi,\pi\right)$. מה קורה בקצוות? לפי דיריכלה:

$$S\left(\pm\pi\right)=\frac{f_{odd}\left(\pi\right)+f_{odd}\left(-\pi\right)}{2}=0$$

השתמשנו בערכים של f_{odd} בקצוות ולא רק בגבולות שלה בקצוות כי היא רציפה. מפה לשם, קיבלנו:

$$S\left(x\right)=\begin{cases} f_{odd}\left(x\right) & -\pi<x<\pi \\ 0 & x\pm\pi \end{cases}$$

אם כן, S לא רציפה בנקודה π, ולכן הטור לא מתכנס במ"ש בקטע $\left[0,\pi\right]$ (טור של פונקציות רציפות, אם ההתכנסות הייתה במ"ש גם S הייתה רציפה...).
בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, S רציפה, וגם S' רציפה; לכן, לפי משפט 2.17, הטור מתכנס במ"ש.

2. נחשב את טור סינוסים של הפונקציה – הטור של f_{odd}:

$$f_{odd}=\begin{cases} x\left(\pi-x\right) & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -x\left(\pi+x\right) & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

שוב, $a_n = 0$ ומתקיים:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\left(\pi - x\right)\sin nx dx$$

ושוב אינטגרציה בחלקים...מקבלים:

$$b_n = \frac{4\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{\pi n^3} \Longrightarrow b_{2k} = 0,\ b_{2k-1} = \frac{8}{\pi\left(2k-1\right)^3}$$

כלומר:

$$S\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(2k-1\right)^3}\sin\left(\left(2k-1\right)x\right)$$

אם נציב $x = \frac{\pi}{2}$, נקבל:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(2k-1\right)^3}\left(-1\right)^{k+1}$$

ולכן:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{\left(2k-1\right)^3} = \frac{\pi}{8}S\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

מכיוון שהפונקציה f_{odd} גזירה בנקודה $\frac{\pi}{2}$, לפי דיריכלה: $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_{odd}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$, וסה"כ:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{\left(2k-1\right)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

3. טור סינוסים הוא טור פורייה של f_{odd}, ולכן - לפי דיריכלה:

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f_{odd}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

כי בנקודה $x = -\frac{\pi}{2}$, הפונקציה f_{odd} גזירה. כמו כן, בקצה:

$$S\left(\pi\right) = \frac{f_{odd}\left(\pi\right) + f_{odd}\left(-\pi\right)}{2} = \frac{f\left(\pi\right) - f\left(\pi\right)}{2} = 0$$