

שאלה לדוגמה: בכיתה יש 60 תלמידים. בתחילת השיעור כל התלמידים שקטים. כל חמש דקות 20% מהתלמידים שלא מדברים מתחילים לדבר. בנוסף, באותו רגע, 50% מהתלמידים שמדברים מפסיקים לדבר.

בסוף השיעור (של מאה ועשרים דקות) כמה מהתלמידים מדברים? (יש לעגל שברי סטודנטים)

פתרון: בשיעור יש 120 דקות, שנחלק לשלבים של 5 דקות, סה"כ 24 שלבים. נסמן ב M_k , התלמידים הם שקטים בתחילת השיעור תנאי ההתחלה הם:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

בשלב k , $1 \leq k \leq 24$ מספר המדברים S_k הוא ניתן על ידי $S_k = (0.8)S_{k-1} + (0.5)M_{k-1}$ כי 80% מהתלמידים השקטים בשלב $k-1$ נשארים שקטים בשלב k וגם חצי מהתלמידים המדברים שותקים. כנ"ל $M_k = (0.2)S_{k-1} + (0.5)M_{k-1}$. שתי המשוואות האלו נותנות משוואה מטריצית אחד. נסמן:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} S_k \\ M_k \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k \leq 24$$

כך שמתקיים

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_k \\ M_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} S_{k-1} \\ M_{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq 24$$

מספר המדברים בסוף השיעור הוא יהיה המספר השלם הכי קרוב ל M_{24} (כי מדובר במספר

סטודנטים שלמים). מתקיים ש $\mathbf{u}_{24} = A^{24}\mathbf{u}_0 = 60 \left(A^{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. עכשיו נלכסן את A .

$$p(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.8 & -0.5 \\ -0.2 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1.3)\lambda + (0.3) = (\lambda - 1)(\lambda - 0.3)$$

השורשים של $p(\lambda)$ הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.3$ והם הערכים העצמיים של A . הישוב פשוט נותן את ווקטורים עצמיים מתאמים להם:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = (0.3)$$

כאשר נציב \mathbf{x}_1 ו \mathbf{x}_2 לעמודות של מטריצה S , נקבל ש $S = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ וגם ש $S^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

סך הכול מתקיים ש $A = SDS^{-1}$, או ש

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.3) \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

לכן

$$A^{24} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{24} & 0 \\ 0 & (0.3)^{24} \end{bmatrix} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

הישוב ישיר נותן ש

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} &= \mathbf{u}_{24} = 60A^{24}\mathbf{u}_0 = 60A^{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{60}{7} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{24} & 0 \\ 0 & (0.3)^{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{60}{7} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2(0.3)^{24} \end{bmatrix} \approx \frac{60}{7} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{60}{7} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.857142 \\ 17.142857 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\approx מופיע כי $2(0.3)^{24}$ הוא בערך 10^{-10} . שממעגלים M_{24} למספר שלם מקבלים ש 17 תלמידים מדברים בסוף השיעור.