מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132 ,88-132)

תשע"ט, מועד ב'

מרצים: פרופ' מיכאל כץ, ד"ר לואי ג'נינגס, אלעד עטייא, דורון פרלמן.

מתרגלים: רועי אבל, אורלי בארשבסקי, אבי כדריה, עקיבה מלכה, דורון פרלמן.

משך המבחן: 3 שעות. יש לענות על כל השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון מדעי (לא מחשבון המצייר פונקציות). כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב את כל התשובות.

שאלה 1 (21 נקודות)

א. (7 נק') יהי a מספר היפרממשי המקיים $st(a) = 1$ ויהי x מספר היפרממשי חיובי. הוכיחו או הפריכו: $st(a^x) = 1$.

הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית: יהי H אינסופי חיובי, נגדיר $a = 1 + \frac{1}{H}$ ו-$x = H$, אז $st(a^x) = e$.

ב. (7 נק') יהיו $a \approx a'$, $b \approx b'$ מספרים היפרממשיים סופיים. הוכיחו או הפריכו: $ab \approx a'b'$.

הטענה נכונה.

$ab - a'b' = ab - a'b + a'b - a'b' = b(a - a') + a(b - b')$
וכעת הביטוי בצד ימין הוא סכום של שני אינפיניטסימליים בגלל שסופי כפול אינפיניטסימלי הוא אינפיניטסימלי.

ג. (7 נק') יהיו f, g פונקציות ממשיות אשר לא גזירות בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו: $f + g$ לא גזירה ב-x_0.
הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית: נסתכל על $f = |x|$, $g = -|x|$. כפי שלמדנו f, g אינן גזירות ב-$x = 0$ אך סכומן הוא הפונקציה הקבועה 0 שכמובן גזירה ב-0.

שאלה 2 (22 נקודות)

א. (11 נק') תהי:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+8}{(8-4x)e^{x-\frac{\pi}{4}}} & x < 0 \\ e^{arctan(e^x)} & x \geq 0 \end{cases}.$$

מיצאו את f' בנקודות בהן f גזירה.
לכל $x < 0$ מקבלים לפי כללי גזירה שהנגזרת היא (לאחר פישוט)

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{2(2-x)^2 e^{x-\frac{\pi}{4}}}$$

לכל $x > 0$ מקבלים לפי כללי גזירה שהנגזרת היא

$$e^{arctan(e^x)} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

ב-0 נגזור לפי הגדרה. מצד שמאל,

$$lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2x+8}{(8-4x)e^{x-\frac{\pi}{4}}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{x}$$

נחשב לפי לופיטל (הנגזרת כבר חושבה לעיל) ונקבל

$$lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x-2}{2(2-x)^2e^{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{-1}{4e^{-\frac{\pi}{4}}}=-0.25e^{\frac{\pi}{4}}$$

מצד ימין,

$$lim_{x\to0^+}\frac{e^{arctan(e^x)}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{x}$$

ושוב לפי לופיטל מקבלים (שוב נציב הנגזרת שכבר חישבנו)

$$lim_{x\to0^+}e^{arctan(e^x)}\frac{e^x}{1+e^{2x}}=0.5e^{arctan(1)}=0.5e^{\frac{\pi}{4}}$$

קיבלנו תוצאות שונות מצד ימין ומצד שמאל לכן הפונקציה איננה גזירה ב-$x=0$.

ב. (11 נק') האם f' רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$? אם לא – מיצאו את נקודות אי-הרציפות של f', **וסווגו אותן**.

ב-$x=0$ הנגזרת לא מוגדרת לכן ודאי לא רציפה. עבור $x<0$ הנגזרת רציפה כהרכבת פונקציות רציפות כי המכנה לא מתאפס (כי הוא מתאפס ב-$x=2$ וזה לא בתחום $x<0$). עבור $x>0$ הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. לסיכום עד כה הראנו שהנגזרת רציפה לכל $x\neq0$ ואיננה רציפה עבור $x=0$. נשאר לסווג את נקודת אי-הרציפות.

נחשב את הגבולות מימין ומשמאל של f'. למעשה כבר חישבנו אותם לעיל כחלק מחישוב ביניים (כשבדקנו האם הפונקציה גזירה ב-$x=0$ והשתמשנו בלופיטל). התוצאות שקיבלנו היו: הגבול מימין הוא $e^{arctan(e)}$ ומשמאל הוא $\frac{-1}{4e^{-\frac{\pi}{4}}}$. קיבלנו שהגבולות החד-צדדיים קיימים אך שונים כלומר מדובר באי-רציפות מסוג ראשון (קפיצה).

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (11 נק')   הוכיחו כי למשוואה $x^6+x^4+x^2-7x-7=0$ יש בדיוק שני פתרונות.

נציב $x=0$ ונקבל -7.
נציב $x=2$ ונקבל מספר חיובי.
נציב $x=-2$ ונקבל מספר חיובי.
הפונקציה $f(x)=x^6+x^4+x^2-7x-7$ רציפה ב-$[-2,0]$ לכן לפי ערך הביניים יש לה שם שורש. באותו אופן היא רציפה ב-$[0,2]$ לכן גם שם יש לה שורש. סה"כ הראנו שקיימים לפחות שני שורשים. (זהו לא אותו השורש כי הפונקציה לא מתאפסת ב-0).

כדי להראות שיש לכל היותר שני שורשים נשתמש במשפט רול (מותר להשתמש בו כי הפונקציה רציפה וגזירה לכל x).

מתקיים $f'(x)=6x^5+4x^3+2x-7$. אם נראה שפונקציה זו מתאפסת לכל היותר פעם אחת נקבל לפי משפט רול (בין כל שני אפסים של הפונקציה יש אפס של הנגזרת) כי הפונקציה המקורית בעלת לכל היותר שני שורשים ולכן סה"כ כי למשוואה יש בדיוק שני פתרונות.

נשאר להראות כי $f'(x)=6x^5+4x^3+2x-7$ מתאפסת לכל היותר פעם אחת. נגזור אותה: $f''(x)=30x^4+12x^2+2$. היא חיובית תמיד לכן לא מתאפסת, לכן לפי מסקנה ממשפט רול ל-$f'(x)$ יש לכל היותר שורש אחד, וזה מה שרצינו להראות.

ב. (11 נק')   הוכיחו שלכל $0<a<b$ מתקיים

$$arctan(b)-arctan(a)\le b-a.$$

לפי משפט לגרנז' בקטע $[a,b]$ עבור הפונקציה $f(x)=arctan(x)$,

שמותר להשתמש בו כי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b), מקבלים כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $f'(c)=\frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}$ כלומר $\frac{arctan(b)-arctan(a)}{b-a}=\frac{1}{1+c^2}$. נשאר להראות כי $\frac{1}{1+c^2}\le 1$ וזה נכון כי $c^2\ge 0$.

<u>שאלה 4 (22 נקודות)</u>

א. (11 נק') חשבו את הגבול $lim_{n\to\infty}\frac{ln(2+3^n)}{2n}$.

נעבור לפונקציה ונחשב הגבול $lim_{x\to\infty}\frac{ln(2+3^x)}{2x}$ לפי לופיטל (המונה אכן שואף לאינסוף כי $xln(3)=ln(3^x)<ln(2+3^x)$): מקבלים $lim_{x\to\infty}\frac{3^x\ln(3)}{2(2+3^x)}$ וע"י חלוקת מונה ומכנה ב- 3^x (לחלופין עושים לופיטל נוסף) מקבלים שהגבול הוא $\frac{ln(3)}{2}$, לכן זה גם גבול הסדרה.

(11 נק') חשבו את הגבול $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2+4}$.

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2+4}=lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{n^2+4}$$

$$=lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2+4}$$

$$=lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n^2-3}\right)^{\frac{n^2-3}{5}}\right)^{\frac{5(n^2+4)}{n^2-3}}=e^5$$

לחלופין ע"י הטריק של $e^{ln(..)}$ ומעבר לפונקציה המתאימה בשביל להשתמש בלופיטל.

שאלה 5 (21 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים, קיבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

א. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{ln(n)}}$

ב. (7 נק') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3\mathrm{n})!}$

ג. (7 נק') $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n!)}$

שלושת הסעיפים הופיעו בש"ב וניתן למצוא את הפתרונות שלהם שם.

בהצלחה!