(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע״ז מועד ב׳

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

יהיו $(b_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות של מספרים ממשיים. יהיו $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ ו $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.

הוכח: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ab$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$, מהנתון קיימים

N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$

N_2 כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $|b_n - b| \leq \epsilon$

כעת ניקח $N := max\{N_1, N_2\}$ ולכל $n \geq N$ מתקיימים שני התנאים, כעת

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

כעת מאי-שיוויון המשולש

$$\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)|$$

כעת b_n מתכנסת ובפרט חסומה, $b_n \leq c$ עבור c כלשהו.

$$= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \leq c\epsilon + |a|\,\epsilon = (c + |a|)\epsilon$$

ולכן סיימנו.

שאלה 2

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot a_{n+1} = 1$.

הוכח שלכל גבול חלקי $a \neq 0$ של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, גם המספר $\frac{1}{a}$ הוא גבול חלקי שלה.

תהי a_{m_n}תת-סדרה של a_n כך ש$a_{m_n} \to a \neq 0$.

נראה כי $a_{m_n+1} \to \frac{1}{a}$.

מתקיים כי החל משלב מסויים $a_n \neq 0$ (אחרת יש סתירה לגבול $lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = 1$)

ומשום ש: a_{m_n} מתכנס וכן $a_{m_n} \cdot a_{m_n+1}$ וכן $a_{m_n} \neq 0$ החל בשלב מסויים, אפשר להסתכל על מנת הגבולות.

$$lim_{n\to\infty} a_{m_n+1} = lim_{n\to\infty} \frac{a_{m_n} \cdot a_{m_n+1}}{a_{m_n}} = \frac{lim_{n\to\infty}(a_{m_n} \cdot a_{m_n+1})}{lim_{n\to\infty}(a_{m_n})} = \frac{1}{a}$$

ולכן סיימנו.

שאלה 3

לכל אחד מהטורים הבאים, בדוק האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{n}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos n}{n^2}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}$.

סעיף א

נראה ראשית שאינו מתכנסת בהחלט, החל משלב מסויים (משום ש$atctan$ עולה)

$$\frac{arctan(n)}{n}\geq\frac{1}{n}$$

ומהשוואה עם הטור ההרמוני, לא מתכנס בהחלט.

נראה שמתכנס בתנאי, לפי לייבניץ מספיק להראות $0 \searrow \frac{arctan(n)}{n}$

ראשית לפי סנדוויץ' היא מתכנסת לאפס:

$$0\leftarrow\frac{-\frac{\pi}{4}}{n}\leq\frac{arctan(n)}{n}\leq\frac{\frac{\pi}{4}}{n}\rightarrow 0$$

מונוטונית יורדת נראה באמצעות שליליות הנגזרת של הפונקציה $f(x):=\frac{arctan(x)}{x}$ בתחום

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x^2+1}-arctan(x)}{x^2}=\frac{x-(x^2+1)\cdot arctan(x)}{x^2(x^2+1)}$$

המכנה תמיד חיובי, וקל להראות שהמונה שלילי ($arctan(x)\geq 1$ לכל $x\geq\pi$) ולכן סיימנו, **מתכנסת בתנאי** לפי לייבניץ.

סעיף ב

קל להראות שמתכנס בהחלט ממבחן ההשוואה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n cos(n)}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|cos(n)|}{n^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

מתכנס בהחלט

סעיף ג

ננסה התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n-n)!}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!^2}{(2n)!}$$

נפעיל מבחן המנה

$$\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{n!^2} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{2n!}{(2n+2)!} = (n+1)^2\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4} < 1$$

וסיימנו, **מתכנס בהחלט**

שאלה 4

הוכח שלפונקציה $\cos(\sqrt{\ln 1/|x|})$ אין גבול בנקודה $x = 0$.

נשתמש בלשון היינה. בעזרת הנדוס לאחור, אפשר למצוא שתי סדרות $a_n \to 0, b_n \to 0$ כך ש$lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq lim_{n\to\infty} f(b_n)$
ניקח

$$a_n := \frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}$$

$$b_n := \frac{1}{e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)^2}}$$

ומתקיים כי

$$f(a_n) = cos(\sqrt{ln(e^{(\pi+2\pi n)^2})}) = cos(\pi + 2\pi n) = -1 \to -1$$

$$f(b_n) = cos(\sqrt{ln(e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)^2})}) = cos(\frac{\pi}{2} + \pi n) = 0 \to 0$$

שאלה 5

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל הישר הממשי $\mathbb{R}$. הוכח:

א. אם הפונקציה f חד־חד ערכית, אז היא מונוטונית (עולה או יורדת).

ב. היעזר בסעיף הקודם להוכיח שקיים מספר ממשי x כך ש $f(f(x)) \neq -x$.

סעיף א

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל הישר הממשי ונניח שהיא חד- חד ערכית.

מרציפות, מספיק להוכיח שלא קיים מינימום או מקסימום לf

נניח בשלילה כי קיים לה מקסימום, בנק' $M\in\mathbb{R}$. אם f קבועה לכל $x<M$ או $x>M$, מקבלים סתירה לחח"ע.

לכן יש $b<M, c>M$ כך ש$f(b)<f(M)$ וכן $f(c)<f(M)$. מסתכלים על הקטע $[b,c]$ ולפי ערך הביניים,

הפונקציה f מקבלת כל ערך $f(b)<d<f(c)$. כעת לכל $x>M$ מתקיים:

$f(x)=M$- יכול לקרות לתחום מסויים, משום שהיא לא קבועה, ניקח x מספיק גדול כך ש$f(x)\neq M$

$f(x)>M$- סתירה להיותה מקסימום

$f(x)<M$- סתירה לחד-חד ערכיות

הראינו שלא קיים מקסימום ל-f,

כעת נפעיל את המשפט על $-f(x)$, לא קיים ל$-f$ מקסימום.

כלומר לא קיים $b<x<c$ כך שלכל $b<x'<c$ השונה מx, $x\neq x'$, מתקיים $-f(x')<-f(x)$

כלומר $f(x')>f(x)$, וזוהי הגדרת המינימום ולכן סיימנו.

סעיף ב

נניח בשלילה שלכל x מתקיים $f(f(x))=-x$

$-x$ היא חח"ע, כלומר $f\circ f$, אבל ממשפט גם f חח"ע

ולפי מה שהראינו מונוטונית.

נניח מונוטונית עולה,

ניקח $x_1\leq x_2$ ומתקיים $f(x_1)\leq f(x_2)$, כעת אם נפעיל את f שהיא פונקציה עולה על שני הערכים נקבל

$$f(f(x_1))\leq f(f(x_2))$$

כלומר

$$-x_1\leq -x_2$$

ובדומה, אם נניח שהיא מונוטונית יורדת.

וזו סתירה לכלליות x_1,x_2- זה מתקיים רק ל0 $x_1,x_2=0$.