נושא: בהינתן חבורה G וחבורות G_1, G_2 איך אנחנו יכולים לדעת אם $G \cong G_1 \times G_2$?
בואו "נחקור" את התכונות של החבורה $G_1 \times G_2$.
1. יש תת חבורה שאיזומורפית לG_1, $H_1 = G_1 \times \{e_{G_2}\}$
ויש תת חבורה שאיזומורפית לG_2, $H_2 = \{e_{G_1}\} \times G_2$.
2. H_1 וH_2 נורמליות.
3. לכל $h_1 \in H_1$ ו$h_2 \in H_2$ $h_1h_2 = h_2h_1$.
4. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$
5. $H_1H_2 = G_1 \times G_2$

טענה. בשביל להוכיח שG איזומורפית ל$G_1 \times G_2$ מספיק למצוא בתוך G שתי תתי חבורות H_1, H_2 שמקיימות את $1, 2, 4, 5$.

הערה. תכונות 2 ו4 גוררות את 3.

הוכחה. יהיו H_1וH_2 שתי תתי חבורות נורמליות שנחתכות טריוויאלי. רוצים להוכיח שלכל $h_1, h_2 \in H_1, H_2$ מתקיים

$$h_1h_2 = h_2h_1$$

שקול:

$$h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} = e$$

מכיוון שנתון שהחיתוך טריוויאלי אז מספיק להוכיח ש$h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

$$(h_1h_2h_1^{-1})h_2^{-1}$$

h_2 נורמלית ולכן $h_1h_2h_1^{-1} \in H_2$. בגלל שהיא תת חבורה היא סגורה להופכיים אז גם $h_2^{-1} \in H_2$. ומכיוון שהיא תת חבורה היא סגורה לכפל, אז $(h_1h_2h_1^{-1})h_2^{-1} \in H_2$.

$$h_1(h_2h_1^{-1}h_2^{-1}) \in H_1$$

□

הוכחה. נוכיח את הטענה. ברור שאם $G \cong G_1 \times G_2$ אז יש לה תתי חבורות שמקיימות את כל התכונות, כי זה מה שראינו.
כיוון שני: תהי G חבורה ונניח שיש לה תתי חבורות נורמיליות H_1, H_2 כך ש: $G = H_1H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ ו$H_1 \cong G_1, H_2 \cong G_2$. אנחנו רוצים לבנות איזומורפיזם $f : G \to G_1 \times G_2$.
יש איזומורפיזמים $f_1 : H_1 \to G_1, f_2 : H_2 \to G_2$. היינו רוצים להגדיר את f באופן הבא:

$$g = h_1h_2$$

$$f(g) = (f_1(h_1), f_2(h_2))$$

צריך להוכיח שf מוגדר היטב. בשביל צריך להראות שהייצוג של כל איבר $g \in G$ כמכפלה h_1h_2 הוא יחיד.

נניח בשלילה

$$g = h_1h_2 = h'_1h'_2$$

$$h_1'^{-1}/h_1h_2 = h'_1h'_2/h_2^{-1}$$

$$H_1 \ni h_1'^{-1}h_1 = h'_2h_2^{-1} \in H_2$$

לכן $h_1'^{-1}h_1 = e$ ו$h'_2h_2^{-1} = e$ כלומר $h_1 = h'_1$ ו$h_2 = h'_2$. וזה אומר שההצגה יחידה.
חח"ע:

$$f(g) = f(x)$$

$$g = h_1h_2, x = h'_1h'_2$$

$$(f_1(h_1), f_2(h_2)) = (f_1(h'_1), f_2(h'_2))$$

f_1וf_2 חח"ע לכן $h_1 = h'_1$ ו$h_2 = h'_2$ ולכן $g = x$.
על: המקור של (y_1, y_2) הוא $f_1^{-1}(y_1)f_2^{-1}(y_2)$
צריך להוכיח שf הומומורפיזם. כלומר

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$$

נסמן $g_1 = h_1h_2$ ו$g_2 = h'_1h'_2$.

$$g_1g_2 = (h_1h_2)(h'_1h'_2) = h_1h'_1h_2h'_2$$

בגלל שהוכחנו שבתתי חבורות נורמליות שנחתכות טריוויאלי, יש חילופיות בין האיברים של שתיהן (זאת ההערה שעשינו לפני ההוכחה).
אז זה אומר ש $h_1h'_1h_2h'_2$ פירוק של g_1g_2 לאיבר מH_1 כפול איבר מH_2.

$$f(g_1g_2) = (f_1(h_1h'_1), f_2(h_2h'_2))$$

$$f(g_1)f(g_2) = (f_1(h_1), f_2(h_2))(f_1(h'_1), f_2(h'_2)) = (f_1(h_1)f_1(h'_1), f_2(h_2)f_2(h'_2)) =$$

$$(f_1(h_1h'_1), f_2(h_2h'_2))$$

כי f_1 וf_2 הומומורפיזמים. $\square$

הערה. אם לG חבורה סופית יש תתי חבורות נורמליות H_1, H_2 שנחתכות טריוויאלי ו- $|H_1| |H_2| = |G|$ אז $G \cong H_1 \times H_2$.
הורדנו את הדרישה ש$H_1H_2 = G$ אבל זה נובע שהדרישות האחרות וחישובי הגדלים.

תרגיל. יהי n איזוגי, הוכיחו ש$D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$.

פתרון. נקח $A = \langle \sigma^n \rangle = Z(D_{2n}) \cong \mathbb{Z}_2$.
$B = \langle \sigma^2, \tau \rangle \trianglelefteq D_{2n}$ כי היא מאינדקס 2, וקל לראות ש $B \cong D_n$.
צריך להוכיח שהחיתוך טריוויאלי.
האיברים בA הם σ^n וe. בשביל להראות שהחיתוך טריוויאלי מספיק להוכיח ש$\sigma^n \notin B$.
האיברים בB הם מהצורה

$$\tau^i (\sigma^2)^k$$

אין לנו שום דרך לייצר σ בחזקה אי זוגית.
לא צריך לבדוק שהם יוצרים הכל כי זה נוסע מהגדלים.

חבורות פתירות

הגדרה. תהי G חבורה. סדרה תת נורמלית היא שרשרת של תתי חבורות של G שכל אחת נורמלית בקודמת.

$$\{e\} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

$G_{i+1} \trianglelefteq G_i$.
הגורמים של סדרה תת נורמלית הם המנות G_i/G_{i+1} עד כדי איזומורפיזם.

דוגמה. $S_3 \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq \{e\}$ הגורמים שלה הם $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ ו$A_3 \cong \mathbb{Z}_3$.

הגדרה. עידון של סדרה תת נורמלית זאת סדרה תת נורמלית שמכילה אותה ממש. "דוחפים" חבורה נוספת באמצע.
נניח $\{e\} \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$ זאת סדרה תת נורמלית.
אפשר לעדן אותה באופן הבא:

$$\{e\} \trianglelefteq \langle (1,2)(3,4) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

סדרה שאי אפשר לעדן אותה נקראת "סדרת הרכב".
סדרה תת נורמלית היא סדרת הרכב אמ"ם הגורמים שלה הם חבורות פשוטות.

דוגמה. בחבורה S_4 יש את סדרה ההרכב: $\{e\} \trianglelefteq \langle (1,2)(3,4) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$. הגורמים שלה הם:

$$S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$$

$$A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$$

$$V_4/\langle (1,2)(3,4) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\langle(1,2)(3,4)\rangle/\{e\}\cong\mathbb{Z}_2$$

הגדרה. חבורה נקראת "פתירה" אם יש לה סדרה תת נורמלית שכל הגורמים בה אבליים.
שקול שיש לה סדרת הרכב עם גורמים אבליים.
הוכחתם שבכל סדרות ההרכב יש את אותם גורמים עד כדי שינוי סדר ואיזומורפיזם.
לכן חבורה היא פתירה אמ"ם בכל סדרת הרכב הגורמים אבליים.

הערה. בשביל להוכיח שחבורה היא פתירה מספיק למצוא איזשהי סדרה תת נורמלית עם גורמים אבליים.

בשביל להוכיח שחבורה היא לא פתירה, צריך למצוא סדרת הרכב ולהראות שבה הגורמים לא אבליים.

דוגמה. כל חבורה אבלית G היא פתירה כי אפשר לקחת $\{e\}\trianglelefteq G$, זאת סדרה תת נורמלית שיש לה גורם אחד, G, והוא אבלי.

כל החבורות D_n הן פתירות, כי $\{e\}\trianglelefteq\langle\sigma\rangle\trianglelefteq D_n$. הגורמים הם $D_n/\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ ו$\langle\sigma\rangle$ שהיא אבלית כי היא ציקלית.

לכל $n\geq 5$ S_n לא פתירה, כי $\{e\}\trianglelefteq A_n\trianglelefteq S_n$ המנות הן $\mathbb{Z}_2$ וA_n שהן פשוטות, ולכן זאת סדרת הרכב. אבל המנות בה לא אבליות.

תרגיל. מצאו את כל סדרות ההרכב של $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\{0\}\trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq 2\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq\mathbb{Z}_{12}$$

$$\{0\}\trianglelefteq 4\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq 2\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq\mathbb{Z}_{12}$$

$$\{0\}\trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{12}\trianglelefteq\mathbb{Z}_{12}$$

הגורמים לפי הסדר הם:
$\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3$

תרגיל. הראו שחבורת הייזנברג $H(\mathbb{Z}_p)$ היא פתירה. (עבור p ראשוני) $\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}$

פתרון. מספיק למצוא סדרה תת נורמלית עם גורמים אבליים.

$$\{e\}\trianglelefteq\left\{\begin{pmatrix}1&0&b\\&1&0\\&&1\end{pmatrix}:b\in\mathbb{Z}_p\right\}\trianglelefteq H(\mathbb{Z}_p)$$

החבורה שבאמצע ניתן להוכיח שהיא המרכז. הגורמים הם $H(\mathbb{Z}_p)/Z(H(\mathbb{Z}_p))$ היא מגודל p^2, וידוע שכל חבורה מסדרp^2 עבור p ראשוני היא אבלית. והגורם השני $Z(H(\mathbb{Z}_p))$ שהוא מסדר p ולכן אבלי. (אפילו ציקלי).

משפט. הוכחתם/ תוכיחו בהרצאה שכל חבורת p היא פתירה.

תרגיל. תהי G חבורה מסדר pq עבור שני ראשוניים שונים. הוכיחו שG פתירה.

פתרון. נניח בה"כ ש$p < q$. אז $n_q \mid p \wedge n_q \equiv 1 \mod q$ לכן $n_q = 1$. אז נסמן בQ את חבורת Q סילו היחידה, היא נורמלית.

$$\{e\} \trianglelefteq Q \trianglelefteq G$$

$|G/Q| = p$ הוא ראשוני ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.
Q מגודל ראשוני ולכן ציקלית ולכן אבלית.
מצאנו סדרה תת נורמלית עם גורמים אבליים.

תרגיל. הוכיחו שכל חבורה G מסדר $3^2 \cdot 11^2$ פתירה.

פתרון. $9 \mid n_{11} \wedge n_{11} \equiv 1 \mod 11$ לכן $n_{11} = 1$. נסמן בP את חבורת 11 סילו היחידה. היא נורמלית.

$$\{e\} \trianglelefteq P \trianglelefteq G$$

הגורמים אבליים כי הם מסדר של ראשוני בריבוע.
(זאת לא בהכרח סדרת הרכב)

משפט. תהי G חבורה ו$N \trianglelefteq G$, אזי G פתירה אמ"ם N וG/N פתירות.

הערה. ככה מוכיחים שכל חבורה מסדר p^n עבור p ראשוני היא פתירה. עושים אינדוקציה על n. עבור $n = 1$ זה ברור כי היא ציקלית ולכן אבלית, וכל חבורה אבלית היא פתירה. כעת נניח שזה נכון לכל $m < n$ ונוכיח לn. אננו יודעים שלחבורת p יש מרכז לא טריוויאלי, ומרכז הוא תת חבורה נורמלית.

אם $Z(G) = G$ אז G אבלית ולכן פתירה. אחרת, לפי הנחת האינדוקציה $Z(G)$ ו$G/Z(G)$ פתירות, כי הן חבורות p עם חזקה יותר קטנה. לפי המשפט זה יגרור שG פתירה.

תרגיל. הוכיחו שכל חבורה G מסדר $3^2 \cdot 11^3$ פתירה.

פתרון. כמו קודם, חבורת 11 סילו יחידה ולכן נורמלית, נסמן אותה בP. P היא חבורת p כי היא מסדר 11^3 ולכן היא פתירה. והמנה G/P היא מסדר 3^2 ולכן אבלית ולכן פתירה. לפי המשפט, אם יש תת חבורה נורמלית שגם היא וגם המנה בה פתירות, אז החבורה פתירה.