תרגיל בית 2 אינפי 3

30 בנובמבר 2016

שאלה 1

קבע האם כל אחת מהקבוצות הבאות הן פתוחות? סגורות? תמצא את כל נקודות ההצטברות שלהן:

א) $A=(0,1)$ ב־$\mathbb{R}$

פתרון:

הקבוצה היא פתוחה. לכל $x\in(0,1)$ נבחר $r=\frac{1}{2}min\left\{x,1-x\right\}$ אז לכל $y\in B(x,r)$ מתקיים $|y-x|<r$ ולכן

$y<x+r<x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x<1$, מצד שני $y>x+r>x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$ ולכן $B\left(x,r\right)\subset(0,1)$.

הקבוצה אינה סגורה, כדי להוכיח את זה נראה ש־A^{c} היא לא פתוחה. נביט על $0\in A^{c}$. לכל $r>0$ נבחר $r^{'}=min\left\{r,1\right\}$ ואז $\frac{r^{'}}{2}\in B\left(0,r\right)\cap A$ ולכן 0 אינה נק' פנימית של A^{c} ולכן אינה סגורה.

ברור שכל נקודה בתוך הקטע היא נקודת הצטברות. נראה שגם 0 וגם 1 הן נקודות הצטברות: מספיק למצוא סדרת נקודות אשר מוכלת ב־A ומתכנסת לאפס, וסדרה שמוכלת ב־A ומתכנת ל־1:

עבור 0 נבחר $a_{n}=\frac{1}{n}$, ברור ש־$a_{n}\subset A$ וגם מתכנסת ל־0, ולכן קיבלנו שבכל סביבה של 0 יש אינסוף נקודות של A השונות מ־אפס ולכן היא נק' הצטברות של A.

עבור 1 נבחר $b_{n}=1-\frac{1}{n}$, ברור ש־$b_{n}\subset A$ ולכן מאותה סיבה כמו מקודם עם 1 היא נקודת בצטברות.

סה"כ נקבל שקבוצת נקודות הצטברות של A היא $[0,1]$.

ב) כל המרחב $\mathbb{R}^{3}$

פתרון:

ברור ש־$\mathbb{R}^{3}$ קבוצה פתוחה, כי סביב כל נק' $x\in\mathbb{R}^{3}$ תמיד קיים $r>0$ כך ש־$B\left(x,r\right)\subset\mathbb{R}^{3}$, אחרת הינו מקבלים ש־$x$ היא נקודה מבודדת בסתירה לכל ש־$\mathbb{R}^{3}$ ההוא מרחב קשיר מסילתית. $\mathbb{R}^{3}$ היא גם סגורה משום שהקבוצה המשלימה שלה היא $\emptyset$ היא פתוחה משום שאין בה אף נקודה ובעצם זה שהיא פתוחה מתקיים באופן ריק.

כל אחת מנקודות שלה היא נקודת בצטברות משום שעבור כל נקודה ב־$\mathbb{R}^{3}$ אפשר למצוא סדרת נקודות המתכנסת אליה, ולכן קבוצת נקודות הצטברות שלה היא כל ה־$\mathbb{R}^{3}$.

ג) $B=\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}<1\right\} \cup\left\{ (0,1)\right\}$

פתרון:

הקבוצה לא פתוחה, לכל $r>0$. $B\left(\left(0,1\right),r\right)\nsubseteq B$. הקבוצה לא סגורה, מכיוון שמשלימתה אימה פתוחה, $(1,0)\in B^{c}$ אם לכל $r>0$, $B\left(\left(1,0\right),r\right)\nsubseteq B^{c}$. הקבוצה $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}<1\right\}$ היא כדור פתוח, לכן פתוחה ולכן כל הנקודות בה הן נקודות הצטברות. גם נקודות הקבוצה $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}=1\right\}$ הן נקודות גבול משום שלכל נקודה בקבוצה הזו אפשר לבחור $r^{'}=min\left\{1,r\right\}$ ואז:

$\left(\left(1-\frac{r^{'}}{2}\right)x,\left(1-\frac{r^{'}}{2}\right)y\right)\in B\cap B\left(\left(x,y\right),r\right)$. כל נקודה (x,y) אחרת אינה נקודת הצטברות.

סה"כ קבוצת נקודות הצטברות $\left\{ (x,y)\,|x^{2}+y^{2}\leq1\right\}$.

שאלה 2

נסמן ב־$A^{'}$ את אוסף נקודות הצטברות של קבוצה A. תהי $A=\left\{ \frac{1}{n}\right\} _{n\in\mathbb{N}}$, מה הן $A^{'},A^{''}$?

פתרון:

$0\in A^{'}$ כי $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. מצד שני, אם ניקח סדרה $\left\{ x_{n}\right\} _{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ אפשר לסדר אותו כתת סדרה של $\left\{ \frac{1}{n}\right\}$ולכן נקודת הגבול היחידה היא 0 וסה"כ $A^{'}=\left\{ 0\right\}$ ולכן $A^{''}=\emptyset$.
אפשר כמובן להסתכל על נק' ההצטברות לפי ההגדרה, ולראות שלמעט 0 את כל הנק' בקבוצה אפשר להקיף בכדור מספיק קטן שאין לו חיתוך עם הקבוצה (למעט המרכז כמובן).

שאלה 3

מצאו את כל הנקודות ההצטברות של הקבוצות הבאות:

א) $\mathbb{Q}$ בתוך $\mathbb{R}$

פתרון:

לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $r>0$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש: $q\in B\left(x,r\right)$ ולכן קבוצת נקודות ההצטברות שלה היא כל $\mathbb{R}$.

ב) הקטע $[0,1]$ בתוך $\mathbb{R}$

פתרון:

לכל $x\in[0,1]$ נסמן: $r=\frac{1}{2}min\left\{ x,1-x\right\}$ ואז קיים $y\in[0,1]$ כך ש־$y\in B\left(x,r\right)$ עם אותו r נקבל שכל $x\notin[0,1]$ אזי נקודת הצטברות ולכן סה"כ מדובר על $[0,1]$.

תרגיל 4

בטענות שתצטרכות להוכיח בשאלה הזאת שתמשנו בכיתה בהנחה שהן נכונות (בכיתה התייחסנו אליהן כאפיון של נקודת הצטברות)

יהי $(\mathbb{R}^{n},d)$ מרחב אוקלידי ו־$A\in\mathbb{R}^{n}$

א) הוכיחו כי $x\in\mathbb{R}^{n}$ היא נקודת הצטברות של קבוצה A אם ורק אם קיימת סדרת נקודות $\left\{ x_{n}\right\} \subset A$ של איבריה שונים ושונים מ־x המתכנסת ל־x.

הדרכה: במרחב אוקלידי נקודת צטברות היא נקודת גבול ולכן יש סדרת נקודות לא קבועה אשר מתכנסת ל־x אך לא בכרח שכולן שונות זו מזו, המטרה היא לבנות סדרה של נקודות שכולן שונות זו מזו.

ב) הוכיחו כי $x\in\mathbb{R}^{n}$ היא נקודת הצטברות של A אם ורק אם לכל $B\left(x,r\right)r>0,$ מכיל אינסוף נקודות שונות של A.

פתרון:

א) (כיוון $\Leftarrow$): נניח שקיימת $\left\{ x_{n}\right\} \subset A$ סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל־x. אזי לכל היותר רק איבר אחד של $\left\{ x_{n}\right\}$ הוא x. אם נזרוק אותו מהסדרה המקורית (בהנחה שבכלל נמצא בסדרה המקורית). נקבל תת סדרה של סדרה המקורית (שהפעם נמצאת כולה ב־$A\backslash x$). המתכסת ל־x. לכן x הוא נקודת הצטברות של A.

(כיוון $\Rightarrow$): נניח ש־x היא נקודת הצטבות של A אזי קיימת $\left\{ x_{n}\right\} \subset A\backslash\left\{ x\right\}$ המתכנסת ל־x. נראה שקיימת תת סדרה $\left\{ x_{n_{k}}\right\}$ שכל איבריה שונים וכמובן גם תתכנס ל־x. נגדיר $n_{2}=min\left\{ x|n>1\wedge x_{n}\neq x_{1}\right\}$.

ברור שמינימום קיים כי מדובר בקבוצה לא ריקה של טבעיים (הקבוצה לא ריקה כי אחרת נקבל שכל איברי הסדרה המקורית שווים ל־x_{1} ומצד שני הסדרה מתכנסת ל־x $x_{1}\neq x$)

נגדיר $n_{3}=min\left\{ n|n>n_{2}\wedge x_{n}\notin\left\{ x_{n_{1}},x_{n_{2}}\right\} \right\}$ גם n_{3} מוגדר היטב כי הקבוצה אינה ריקה. אחרת החל ממקום מסויים כל האיברים הם $x_{n_{1}}$ או $x_{n_{2}}$ ואז לסדרה מקורית קיימת בהכרח תת סדרה קבועה שכל איבריה הם $x_{n_{1}}$ או שקיימת לה תת סדרה שכל איבריה $x_{n_{2}}$

ובכל מקרה תת סדרה זו לא תוכל להתכנס ל־x, בסתירה לכך שהסדרה המקורית המתכנסת ל־x. כל באופן אינדוקטיבי נגדיר

$n_{k+1} = min\left\{n|n > n_k \wedge x_n \notin \left\{x_{n_1}, ..., x_{n_k}\right\}\right\}$, בדומה לנימוק הקודם, הקבוצה אינה ריקה והמינימום מוגדר היטב לכל k. ברור גם שזו סדרה עולה של אינדקסים ולכן בנינו באמת תת סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל־x.

ב) (כיוון $\Rightarrow$): נבנה סדרה $A \subset \{x_n\}$ סדרה עם איברים שונים הנתכנסת ל־x. ע"פ ההנחה נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x \neq x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. ברור ש־$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכסת ל־x.

(כיוון $\Leftarrow$): ע"פ סעיף אי קיימת סדרה $A \subset \{x_n\}$ סדרה עם איברים שונים המתכנסת ל־x ולכן לכל $r > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ $x_n \in B\left(x, r\right)$. מכאן $\{x_n\} \subseteq B\left(x, r\right) \cap A$ תת קבוצה אינסופית וקיבלנו את הדרוש.