

תרגיל בית 9 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשע"ט

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1.

תהי G חבורה סופית, ויהי $g \in G$ איבר מסדר k . הוכיחו שהשיכון ממשפט קיילי שולח את g למכפלת מחזורים זרים מאורך k .

שאלה 2. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi: U_8 \rightarrow S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

שאלה 3. מצאו את הסדרים של כל תת-חבורות סילו של S_5 . מי מהן אבליות?

שאלות רגילות

שאלה 4. יהיו $p \leq q$ ראשוניים (לאו דווקא שונים).

1. הוכיחו שכל חבורה מסדר pq^n עבור $n \in \mathbb{N}$ אינה פשוטה.

2. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 הן לא פשוטות. זה שונה מהסעיף הקודם.

שאלה 5. יהי p מספר ראשוני.

1. תהי G חבורה לא אבלית מסדר p^3 . הוכיחו כי $Z(G) = G'$.

2. תהי G חבורה סופית, ונניח $p \mid |G|$. הוכיחו שקיים $z \in G$ מסדר p כך ש- $C_G(z)$ מכיל תת-חבורת p -סילו של G . רמז: בחרו איבר השייך למרכז של תת-חבורת p -סילו.

שאלה 6. תהי חבורה G מסדר $p^t m$, כאשר p ראשוני, $m > 1$ טבעי שזר ל- p ו- $t \in \mathbb{N}$.

1. נניח ש- $|G|$ לא מחלק את $m!$ (ניתן להסתפק בכך ש- $|G|$ לא מחלק את $(n_p!)$. הוכיחו כי G לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

2. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

שאלה 7. תהינה G, H חבורות.

1. הוכיחו כי $\text{Inn}(G) \times \text{Inn}(H) \cong \text{Inn}(G \times H)$

2. הוכיחו כי $\text{Inn}(S_3) \cong S_3$ ומצאו אוטומורפיזם שאינו פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$.
 רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת-חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

שאלה 8. תהי G חבורה.

1. הוכיחו כי $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$. רמז: הראו כי $\gamma_{\varphi(g)} = \varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}$ לאיברים מתאימים.

2. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\text{Aut}(G)}(\text{Inn}(G)) = \{\text{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\text{Aut}(G)) = \{\text{id}\}$.

שאלה 9. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה המוכלת ממש ב- G .

1. הוכיחו שאם G סופית, אז גם האיחוד $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ מוכל ממש ב- G . רמז: העזרו באינדקס של המנרמל.

2. כעת לא נניח ש- G סופית, אבל שהאינדקס $[G : H] < \infty$ עדין סופי. הוכיחו שהסעיף הקודם עדין נכון. רמז: H מכילה תת-חבורה נורמלית וקצת משפטי האיזומורפיזם.

שאלות אתגר

שאלה 10. תהי G חבורה מסדר n . הוכיחו כי השיכון $G \rightarrow S_n$ ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם תת-חבורה 2-סילו של G היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלת חימום 1