אינפי II תרגולים - תרגול IV

אינטגרל מסוים לפי רימן

הגדרות

I. יהי $[a,b]$ קטע סגור. $P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ נקרא **חלוקה של $[a,b]$**.

נסמן $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

II. **חלוקה מסומנת של $[a,b]$:** חלוקה יחד עם בחירה של נק' $d_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall 1\le i\le n$

III. **סכום רימן המתאים לחלוקה מסומנת:** $\sigma(P) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(d_k)$

IV. **הנורמה של החלוקה:** $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$

V. L הוא **אינטגרל רימן** ב-$[a,b]$ אם לכל סדרת חלוקות מסומנות P_n כך ש- $\lambda(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(d_k) = L \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sigma(P_n)\right)$$

(במילים: הגבול אינו תלוי בחלוקה)

חלוקה שימושית: החלוקה השווה - לחלק את $[a,b]$ ל-n קטעים שווים באורכם

$$\Delta_k = \frac{b-a}{n} = \lambda(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

עבור חלוקה שכזו ניתן לבחור נקודות d_k בצורה הבאה:

(a) נק' קצה ימנית: $d_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ (b) נק' קצה שמאלית: $d_k = a + \frac{k-1}{n}(b-a)$

משפט

(I) f פ' רציפה בקטע סגור אינטגרבילית (רימן) שם

(II) f פ' מונו' בקטע סגור אינטגרבילית (רימן) שם

(III) f פ' אינטגרבילית בקטע סגור חסומה שם.

דוגמא

חשבו את האינטגרל $\int_0^5 (5-x)\,dx = \lim_{\lambda(P_n)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k (5-d_k)$

פתרון, נשים לב כי הפו' $f(x)=5-x$ אינטגרבילית רימן ב- $[0,5]$ כיוון שהיא רציפה שם, לכן מספיק לחשב את $\lim_{\lambda(P_n)\to 0} \sigma(P_n)$ עבור חלוקה מנוקדת מסוימת (הגבול אינו תלוי בחלוקה).

נבחר את החלוקה השווה של הקטע עם נק' קצה ימנית, כלומר

$d_k = \frac{5k}{n}$, $\Delta x_k = \frac{5}{n}$: $\forall\, 1\le k\le n$

ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(5-\frac{5k}{n}\right)\cdot\frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{25}{n}-\frac{25k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{25}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{25k}{n^2}\right) =$$

סכום ס' חשבונית

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{25}{n} - \frac{25}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(25 - \frac{25}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{(1+n)\cdot\cancel{n}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(25-\frac{25(n+1)}{2n}\right) =$$

$$= 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}$$

<u>תרגיל</u>

חשבו את $\int_1^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx$

שכן, $f(x) = 4-\frac{x^2}{4}$ לכן הי' רציפה ב- $[1,3]$ ולכן אינט' רימן שם.

מספיק לחשב $\lim_{\lambda(P_n)\to 0} \sigma(P_n)$ עבור חלוקה מנוקדת שנבחר (הגבול אינו תלוי בחלוקה)

נבחר את החלוקה השווה עם נק' קצה ימנית!

$$\forall_{1\le k\le n}: \quad \Delta x_k = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \quad d_k = 1+\frac{k}{n}(3-1) = 1+\frac{2k}{n}$$

$$\Longrightarrow \int_1^3 \left(4-\frac{x^2}{4}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k f(d_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(4-\frac{\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2}{4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4n}\sum_{k=1}^{n}16-\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}16-1-\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n}15-\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(15n-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(15n-\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{15}{2}-\frac{n+1}{n}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(2n+1)(n+1)}{n^2} = \frac{15}{2}-1-\frac{2}{3} = \frac{35}{6}$$

תרגיל

חשבו את $\int_1^4 \frac{1}{x^3}\,dx$

נכון: $f(x)=\frac{1}{x^3}$ רציפה ב-$[1,4]$ ולכן אינטגרבילית רימן שם, ולכן נוכל לבחור חלוקה ספציפית ולחשב את $\lim\limits_{\lambda(P_n)\to 0}\sigma(P_n)$ (הגבול אינו תלוי בחלוקה).

נגדיר את החלוקה הבאה!

$$P_n: \quad x_0 := 1 = \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^0 < x_1 := \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^1 < x_2 := \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^2 < \dots < x_n := \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^n = 4$$

כלומר $x_k = \left(4^{\frac{1}{n}}\right)^k$ לכל $0 \le k \le n$. נבחר גם נקודות שמאליות, כלומר $\forall k: d_k = x_k$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \Delta x_k f(d_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(4^{\frac{k}{n}}-4^{\frac{k-1}{n}}\right)\cdot\frac{1}{\left(4^{\frac{k}{n}}\right)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(4^{\frac{k}{n}}-\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\cdot 4^{\frac{k}{n}}\right)\cdot\frac{1}{4^{\frac{3k}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\right)\sum_{k=1}^n\frac{1}{4^{\frac{2k}{n}}} =$$

סכום ס' הנדסית

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\right)\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}\left(\left(\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\cancel{\left(1-\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}\left(\frac{1}{4^2}-1\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}-1\right)}\left(\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4^{\frac{2}{n}}}\left(1-\frac{1}{16}\right)}{\frac{1}{4^{\frac{1}{n}}}+1} = \frac{\frac{15}{16}}{2} = \frac{15}{32}$$

תרגיל

הוכיחו כי פו' דיריכלה $(Dirichlet)$ על $[0,1]$ המוגדרת לפי:

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינה אינטגרבילית רימן (לפעמים $D(x)$ מוגדרת הפוך, כמציין של $\mathbb{Q}$).

נראה כי הגבול $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P)$ תלוי בחלוקה (כלומר אינו קיים):

<u>חלוקה ראשונה:</u> חלוקה שווה של $[0,1]$ יחד עם נק' ביניים רציונליות, כלומר:

$$P_1:\ \forall\, 0\le k\le n:\ x_k=\frac{k}{n}\ ,\ \ d_k\in\mathbb{Q}\cap\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

אזי מתקיים: $\sigma(P_1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k D(d_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot 0=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

<u>חלוקה שניה:</u> חלוקה שווה ל-$[0,1]$ יחד עם נק' ביניים אי-רציונליות, כלומר:

$$P_2:\ \forall\, 0\le k\le n:\ \tilde{x}_k=\frac{k}{n}\ ,\ \ \tilde{d}_k\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

אזי מתקיים: $\sigma(P_2)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta\tilde{x}_k D(\tilde{d}_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot 1=n\cdot\frac{1}{n}=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

כלומר הגבול תלוי בחלוקה ולכן הפו' אינה אינט' רימן.

תרגיל

האם הפו' $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינטגרבילית רימן ב-$[0,1]$?

לא! כיוון ש- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\infty$, כלומר $f(x)$ אינה חסומה ב-$[0,1]$ ולכן אינה אינט' רימן.

אינטגרל מסוים לפי דרבו

הגדרה

(I) עבור החלוקה $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:P של הקטע $[a,b]$ נגדיר:

סכום דרבו תחתון של החלוקה: $\underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$, $\alpha_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

סכום דרבו עליון של החלוקה: $\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta x_i$, $\beta_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

(II) אינטגרל דרבו העליון: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(P) | P\}$

(III) אינטגרל דרבו התחתון: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(P) | P\}$

משפט (דרבו)

מתקיים:

(I) $$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} \overline{S}(P)$$

(II) $$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} \underline{S}(P)$$

מסקנה: ניתן לבחור סדרת חלוקות P_n עם $\lambda(P_n) \to 0$ כרצוננו ולחשב:

$$\begin{cases} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(P_n) \\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \underline{S}(P_n) \end{cases}$$

<u>הגדרה</u>

נאמר ש- f אינטגרבילית דרבו אם $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

<u>משפט</u>

תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. אז f אינטגרבילית רימן אם"ם היא אינטגרבילית דרבו ובמקרה זה האינטגרלים שווים. (מעכשיו נאמר פשוט אינטגרבילית)

<u>תרגיל</u>

הוכיחו/הפריכו

(I) אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ אז $f+g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$

<u>הוכחה:</u> מתקיים:

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(P) = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f+g)(x)\,\Delta x_i \le$$

$$\le \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)\right)\Delta x_i = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot\Delta x_i + \sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)\,\Delta x_i =$$

$$\underset{f,g \text{ אינט'}}{=} \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ובאופן דומה $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx$.

כיוון שבפרט שלנו בקטע מתקיים $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx \underset{\text{תמיד}}{\le} \overline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx \le \underline{\int_a^b}(f+g)(x)\,dx$$

(II) תבי: f פו׳ המוגבלת ב- $[a,b]$. ותהי P חלוקה של $[a,b]$ כך ש-

$\bar{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=0$. אז f אינט׳ ב- $[a,b]$

$$\bar{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Delta x_i, \quad \underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$$

מהנתון נקבל:

$$\bar{S}(P)-\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\Delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$\forall\, 1\le i\le n:\ \beta_i=\alpha_i$ (כי $0<\Delta x_i$, $\alpha_i\le\beta_i$ וסכום של רכיבים אי-שליליים $=0$ אז כל הרכיבים $=0$)

נבנה סדרת חלוקות באופן הבא:

⊛ $P_1=P$.

⊛ $\underline{P_2}$: לכל $1\le i\le n$ נבחר $y_i\in(x_{i-1},x_i)$ ונעדכן את החלוקה ע״י פיצול הקטעים

$[x_{i-1},x_i]$ ל- $[y_i,x_i]$, $[x_{i-1},y_i]$. כלומר:

$P_2:\quad a=x_0<y_1<x_1<y_2<\dots<x_{n-1}<y_n<x_n=b$

באינדוקציה נמשיך לבנות את שאר החלוקות P_n (תהליך פורמלי קשה באינדקסים).

נשים ♡ כי לאור החלוקה מתקיים שבכל קטע $\inf f=\sup f$:

(ההוכחה באינדוקציה: נראה כי P_2 מקיים, ההמשך מושאר כתרגיל)

ב- P_2: נניח קיים $1\le j\le 2n$ כך ש- $\tilde{\beta}_j=\sup\limits_{x\in[\tilde{x}_{j-1},\tilde{x}_j]}f(x)\gneq\inf\limits_{x\in[\tilde{x}_{j-1},\tilde{x}_j]}f(x)=\tilde{\alpha}_j$

אזי קיים $1 \le i \le n$ כך ש- $[\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$ ומתקיים:

$$\alpha_i \le \tilde{\alpha}_j < \tilde{\beta}_j \le \beta_i$$

בסתירה לכך ש- $\alpha_i = \beta_i$.

בסה"כ מתקיים $\sup\{\underline{S}(P) \mid P\} = \inf\{\overline{S}(P) \mid P\}$ כנדרש ■