הרצאה XIV- מכניקה

<u>נושאים מנהליים חשובים</u>: הבוחן השני יהיה בשבועיים שאחרי חנוכה, באותה מסגרת כמו הבוחן הקודם. יכלול חוקי ניוטון, גלגלות וחוטים בעלי חיכוך ומסה, ותנע קווי. בעצם הרצאות 5-13. התאריך: 26.12.2012. לבצע סקר לגבי הרצאת חזרה במהלך חנוכה.

<u>עבודה ואנרגיות</u>:

היום נפתח את משפט עבודה אנרגיה שיהיה מאוד שימושי לנו. מתקיים $m\ddot{x} = \vec{F}(t)$. הנקודה היא שבד"כ בחיים בעיות עם כח קבוע הן בעיות נדירות, ולכן נצטרך לפתח דרך אחרת לפתרון בעיות. הדרך החדשה שנקבל תהיה בעלת רווח גדול, אך במחיר של התלות בזמן.

נתחיל בפיתוח: $m\frac{dv}{dt} = F(x)$ נבצע אינטגרל בשתי האגפים לפי x, ז"א $\int_{x_1}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_f} F(x)dx$. ניתן לרשום את dx בצורה קצת שונה: $dx = \frac{dx}{dt}dt = V\,dt$ נציב באגף שמאל ונקבל $\int_{x_1}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_f} m\frac{dv}{dt}V\,dt = m\int_{x_1}^{x_f} Vdv$ נרחיב טיפה כדי לקבל $\frac{m}{2}\int_{x_1}^{x_f}\frac{d}{dt}[v^2]\,dt = \frac{1}{2}mV^2\Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2$ ולכן מתקיים $\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2$.

לאחר שימוש מרובה החליטו לקרוא ל$\frac{1}{2}mV^2$ אנרגיה קינטית, ולכן אפשר לסמן $\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = E_k^f - E_k^i = \Delta E_k$. לאגף השמאלי, אותו אינטגרל, יקרא עבודה. נגדיר את היחידות להיות $N\cdot m = Joule = 10^{-7}erg$.

דוגמא 1: כדור נזרק כלפי מעלה, כח שפועל מטה הוא mg. מתקיים: $-\int_{y_0}^{y} mg\,dy = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2$ ולאחר ביצוע האינטגרציה מתקיים: $-mg(y-y_0) = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2$. נבדוק מתי יש מיקום מקסימלי- הכי גבוה? ידוע שהמיקום המקסימלי יתקבל כשהמהירות תתאפס. לכן: $-g(y-y_0) = -\frac{1}{2}V^2$, ואם נבצע העברת אגפים נראה שהדבר נובע ישירות גם מקינמטיקה: $y_{max} = y_0 + \frac{V_0^2}{2g}$.

דוגמא 2: נעבור כעת לדוגמא פחות טריוויאלית- קפיץ ומסה בקצהו. נניח שהרחקנו אותו טיפה מנקודת שיווי המשקל, וניתן לו להתנדנד. כעת נחפש את מיקום ומהירות הגוף שכפונקציה של הזמן. נרשום ע"פ הפיתוח הקודם – משפט עבודה אנרגיה- ונקבל $\frac{1}{2}mv^2(x) - \frac{1}{2}mv^2(0) = \int_{x_0}^{x} F(x)dx = -\int_{x_0}^{x} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_0}^{x} = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$ ידוע שהמהירות ההתחלתית היא 0, ולכן ניתן למצוא את המהירות כפונקציה של המיקום $V(x) = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2}$. ע"פ הגדרת המהירות מתקיים $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2}$ ונעביר אגפים לקבל $\frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt$ נבצע אינטגרציה בשתי האגפים כדי לקבל $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{k}{m}}dt$, ע"פ חוקי אינטגרלים מתקיים $Arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\Big|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}t\Big|_{t_0}^{t}$ ולאחר הצבה, שוב, בשתי האגפים, נקבל $Arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)$ ולכן נקבל שמתקיים $x(t) = x_0\cos[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)]$, ניתן לגזור את הביטוי ולקבל מיידית את המהירות שפיתחנו ע"פ משפט עבודה אנרגיה, הלא היא $V(x) = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{x_0^2 - x^2}$.

כעת נפתח את המשפט לתלת מימד, במקרה הזה מדובר בפיתוח טיפה יותר מורכב, ונראה זאת עכשיו. נסתכל בביטוי הבא, $\frac{d}{dv}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\underbrace{\dot{v}}_{\bar{a}=\frac{\bar{F}}{m}}\vec{v} = \frac{2}{m}\bar{F}\cdot\bar{V}$. ולכן מתקיים $\Delta(v^2) = \frac{2}{m}\bar{F}\cdot\overbrace{\bar{V}\Delta t}^{\Delta\bar{r}} = \frac{2}{m}\bar{F}\cdot\Delta\bar{r}$, נמשיך את הפיתוח ונקבל

כי $\sum_i \Delta(v^2) = \sum_i \frac{2}{m}\bar{F_i}\cdot\Delta\bar{r_i}$ ולכן מתקיים $\int_i^{f_0}\frac{2}{m}\bar{F}(\bar{r})d\bar{r} = v_f^2 - v_i^2$.

אם נעביר אגפים נקבל : $\int_i^{f_0}\bar{F}(\bar{r})d\bar{r} = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$.