הרצאה XX- מכניקה

תזכורת משיעור קודם:

$$E_K=\frac{1}{2M_T^2}[m_1^3v_1^2-2m_1^2m_2v_1^2+m_1m_2^2v_1^2+4m_1^2m_2v_1v_2-4m_1m_2^2v_1v_2+4m_1m_2^2v_2^2+4m_1^2m_2v_1v_2-4m_1^2m_2v_1v_2+m_2^3v_2^2-2m_1m_2^2v_2^2+m_1^2m_2v_2^2].$$

הערה מנהלתית: הבוחן הבא יהיה ב16.1.2013.

חזרה לחומר הנלמד: דיברנו על התנגשויות בין גופים, בפרט דיברנו על התנגשות בחד מימד. למדנו דברים רבים בעזרת שימור תנע ושימור אנרגיה בהתנגשות אלסטית. דיברנו על מקרה בו לאחר ההתנגשות הגופים נדבקים- אין בו שימור אנרגיה- ונקרא להתנגשות זו התנגשות פלסטית. כמו כן, דיברנו על התנגשות אלסטית לחלוטין, בה האנרגיה נשמרת.

בשיעור הקודם הראנו שמתקיים $v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{M_T}$, $v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{M_T}$. הכל יחסית לצופה נייח כמובן. נראה שמתקיים כי $E_k=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$. נצמצם, נחסיר, ונבצע כמה פעולות על הביטוי מתחילת השיעור כדי לקבל משהו יותר נוח $E_k=\frac{1}{2M_T^2}\left[m_1v_1^2\left(\underbrace{m_1^2+2m_1m_2+m_2^2}_{M_T^2}\right)+m_2v_2^2\left(\underbrace{m_2^2+2m_1m_2+m_1^2}_{M_T^2}\right)\right]$ ולכן מיידית מתקבל מה שרצינו להוכיח.

נבחן מקרה קצה, שהוא $m_1=m_2=m$, ונקבל שהמהירויות מתחלפות בינהם, ז"א $v_1'=v_2, v_2'=v_1$. המקרה קיצון השני הוא נניח ש$v_2=0$, נקבל ש $v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2}, v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$. מקרה נוסף הוא $v_2=-v_1$, במקרה שבו הם באים באותה מהירות, אחד מול השני, מתקבלות המהירויות הבאות: $v_1'=\frac{m_1-3m_2}{m_1+m_2}v_1, v_2'=\frac{m_2-3m_1}{m_1+m_2}v_2$, גם כאן צריך להבדיל בין המצבים השונים עם גדלי המסות, נניח במקרה שבו $m_1\gg m_2$, נקבל $v_1'=v_1, v_2'=-3v_2$.

דוגמא: שתי כדורים (אחד גדול מאוד ביחס לשני, והוא התחתון) שנופלים מגובה h יחסית לקרקע, ברגע שיפגעו בקרקע המהירות שלהם תהיה $v=\sqrt{2gh}$. לפי מה שפיתחנו לפני רגע $v_1'=3\sqrt{2gh}$, נציב לפי שימור האנרגיה, בגלל שהכוחות משמרים, ונראה שמתקבל $\frac{1}{2}mv_1'=9\cdot 2gh\cdot\frac{1}{2}m_1=m_1gh'$ ולכן $h'=9h$.

אם מדובר בשתי מסות, מתקיים $\vec{P}_1^{CM}=-\vec{P}_2^{CM}$. ומתקיים $\vec{P}_1^{CM\prime}=-\vec{P}_2^{CM\prime}$.

כמו כן $E_{CM}=\frac{1}{2}m_1{v^{CM}}_1^2+\frac{1}{2}m_2{v^{CM}}_2^2=\frac{{\vec{P}_1^{CM}}^2}{2m_1}+\frac{{\vec{P}_2^{CM}}^2}{2m_2}=\frac{1}{2}{\vec{P}_1^{CM}}^2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$.

גם $E_{CM}'=\frac{1}{2}m_1{v'^{CM}}_1^2+\frac{1}{2}m_2{v'^{CM}}_2^2=\frac{{\vec{P}_1'^{CM}}^2}{2m_1}+\frac{{\vec{P}_2'^{CM}}^2}{2m_2}=\frac{1}{2}{\vec{P}_1'^{CM}}^2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$.

מה ניתן להגיד על זווית הפיזור? לאחר ההתנגשות? כלום. היא נקבעת לפי הפרטים של האינטרקציה בין הגופים.

וגם $\vec{v}_1=(v,0);\vec{v}_2=0$. $v_{CM}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}v\,\hat{x}$, וגם $v_1^{CM}=v_1-v_{CM}=v\hat{x}-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\hat{x}=\frac{m_2v}{m_1+m_2}\hat{x}$.

נניח שווית הפיזור היא $\theta_{\rm CM}$, ונקבל שמהירות החדשה היא בעצם $v_1^{CM}=\frac{m_2v}{m_1+m_2}(\cos\theta_{\rm CM},\sin\theta_{\rm CM})$.

כמו כן מתקיים

$$v_1^1=v_1^{CM}+V_{CM}=\frac{m_2v}{m_1+m_2}\left[\cos\theta_{\rm CM}\hat{x}+\sin\theta_{\rm CM}\hat{y}\right]+\frac{m_1v}{m_1+m_2}\hat{x}=\frac{v}{m_1+m_2}\left(\underbrace{[m_1+m_2\cos\theta_{\rm CM}]}_{v_{1x}}+\overbrace{m_2\sin\theta_{\rm CM}\,\hat{y}}^{v_{1y}}\right).$$

ומכאן ש $tg\,\theta_{\rm CM}=\frac{m_2\sin\theta_{\rm CM}}{m_1+m_2\cos\theta_{\rm CM}}=\frac{\sin\theta_{\rm CM}}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\theta_{\rm CM}}$. אפשר להביט במקרי הקצה כדי לראות את ההיגיון

במשוואה. נניח שנביט ב$m_2 \ll m_1$, ונקבל שהדבר מתקיים ונכון. אם נביט במקרה $m_2 \gg m_1$, נקבל גבול עליון ותחתון לביטוי $tg\ \theta_{\mathrm{CM}}$, וכך נוכל לקבל את האפשרויות השונות לטנגנס של הזווית.